

Sirklers Metriske Relasjoner

Morten Eide

20. april 2007

Forord

Dette arbeidet er resultat av en del års eksperimentering i det geometriske landskap, og to år ved masterstudiet ved UiO. Ved det egne arbeidet med geometrien oppstod mange spørsmål og spredte resultater av ulik art. Med masterstudiet har det vært mulig å gå dypere inn på spørsmålene og søke et teoretisk grunnlag for de ulike fenomenene.

Arbeidet er for en stor del utviklet på autodidaktisk vis. Dette er karakteristisk for fenomenområdet, der mange teoremer er oppdaget og så glemte igjen for så å bli oppdaget av andre. Først når resultatene var etablert var det lettere å kjenne igjen disse i litteraturen, og ofte dreide det seg om resultater fra 1800 tallet. Alt ble likevel ikke utviklet autodidaktisk, for uten sirkeldeterminaten som ble funnet i G. Salmons bok om sirkler og kjeglesnitt hadde ikke temaet kunnet bli forstått i den ramme det er gjort her. Helt til det siste er andre tilknytningspunkter funnet i ulike matematiske arbeider, også arbeid som er gjort nylig, og alt dette ikke i tilstrekkelig grad blitt inkorporert i arbeidet.

Kristian Ranestand må takkes generelt for alle intense samtaler knyttet til å gjøre problemstillingene og fremstillingene tydelige, og spesielt for å ha ledet arbeidet i retning av å finne tilknytningspunkter mellom geometrien og algebraen.

Til slutt må jeg si at uten Livs tilskyndelser og støtte hadde ikke dette arbeidet blitt til.

Morten Eide

Innhold

1	Innledning	6
2	Invers radius teoremer	9
2.1	Sirkler innskrevet i en trekant	9
2.2	Arbelos teoremer	13
2.3	Descartes teorem	16
2.4	Heltallsforhold	21
3	Morfologiske overganger	23
3.1	Linjedannelse	23
3.2	Åttesirkelteoremet	26
3.3	Hartsirkler	29
4	Punktrelasjoner	33
4.1	Avstandsrelasjon mellom fire punkter.	33
4.2	Spesielle punktteoremer	35
4.3	Utledning av Descartes teorem	39
5	Cayleydeterminanten	40
5.1	Vinkelavstand	40
5.2	Cayley-determinanten	42
5.3	Anvendelse av determinanten	44
5.4	Appolonius problem	49
5.5	Oppgaver	51
6	Sirkel, linje og punktstrukturer	52
6.1	Linjedannelse	52
6.2	Punktdannelse	55

6.3	De ulike vinkelavstander	57
6.4	Ulike problemstillinger	59
6.5	Forhold i koordinatsystemet	62
7	Hart-typen	64
7.1	Generalsisering av C-typen	64
7.2	Sirkelteoremer	65
7.3	Punkt-linje dannelser	67
7.4	Koordinatsystem	69
7.5	Cosinussetningen	70
8	Grunddeterminanten	72
8.1	Den inverse radius som v-avstand.	72
8.2	System av ti sirkler	73
8.3	V-typen	76
8.4	Lineære sammenhenger	81
9	Sirkelgeometrier	84
9.1	Metriske forhold i Møbiusgeometrien	85
9.2	Inversjon	87
9.3	Sirkelkretser	92
9.4	Spesielle sirkelkretser	95
9.5	Konjugerte kretser i rommet	99
10	Ikke euklidisk geometri	102
10.1	Poincares diskmodell	103
10.2	Hyperbolsk geometri ut fra S-typen.	103
10.3	Trekanter i hyperbolsk geometri	110
10.4	Sirkler i hyperbolsk geometri	113
11	Dannelse av koordinater	120
11.1	Sirkelligningen	121
11.2	V-avstanden ved koordinater	122
11.3	Koordinater til linjer og punkter	124
11.4	Sirkelplan	125
12	Sirkelkoordinater	126
12.1	Ortogonalt koordinatsytem	126
12.2	Standard koordinatsystem	129

12.3	Relasjoner ut fra S-koordinater	133
12.4	Definisjon av sirkelvektorer	136
12.5	Bevis for fundamentaldeterminanten	139
13	Anvedelser av Sirkelvektorer	140
13.1	Løsning av insidensproblemer	140
13.2	Heltallstrukturer	143
13.3	Sirkelvektorer	147
13.4	Koordinatskifte og lineære avbildninger	148
13.5	Ikke-euklidsk geometri	150
13.6	Fundamental lineærligning	151

Kapittel 1

Innledning

Disse betraktningene er resultat av en generell bestrebelse anvendt på et bestemt geometrisk område. Den generelle bestrebelsen er å studere forvandlingsmotiver i matematikken. Dette er en grunnleggende side ved den moderne matematikk, og dette temaet er for det meste knyttet opp mot begrepet avbildninger. Disse avbildningene følger bestemte regler, og det finnes ulike verktøy for disse avbildningene.

I denne fremstilling forstår vi forvandlingsmotivet noe annerledes. Her har vi studert det vi kan kalle intuitive forvandligstemaer. Slike operasjoner gjøres stadig vekk når vi går fra en generell til en spesiell problemstilling, eller når vi ut fra en sammenheng søker å generalisere denne. Slike motiver har vi fulgt mer systematisk, og et ledemotiv for undersøkelsene har vært å søke generelle symmetriske sammenhenger. Fra slike overordnede generelle strukturer er da oppgaven å se hvordan de spesielle strukturene oppstår. Dette vil vi kalle en morfologisk metode, til forskjell fra en konstruktiv metode der elementer kombineres. Slike betraktninger kan vi gjøre overalt i matematikken, og vi har tidligere studert dette i forbindelse med de elliptiske funksjonene.

Her har vi søkt slike generelle strukturer i tilknytning til metriske aspekter for sirkler. Utgangspunktet for betraktningene var observasjonen av at i systemer av sirkler fikk man relativt enkle uttrykk når ikke den ordinære men den inverse radius inngikk i uttrykkene. Et spesielt teorem i denne henseende er det såkalte Descartes sirkel teorem. Disse strukturene lot seg også bevege ved at når noen sirkler i strukturen gikk over til linjer ble den inverse radius lik 0, og strukturene endret dermed karakter. Det viste seg også fruktbart å

forsøke å generalisere disse sirkelstrukturene ut fra samme prinsipp. Ved å gå fra strukturer som inneholdt linjer og la disse bli sirkler viste det seg at det var mulig å finne relativt omfattende metriske sammenhenger i systemer av sirkler. Disse lot seg på rent morfologisk vis forvandle fra den ene til den andre strukturen. De første kapitlene i denne fremstillingen søker å kartlegge dette området.

Problemstillingen knyttet til denne fremstillingen var å søke et teoretisk grunnlag for det som vi for en stor del hadde kommet frem til på rent intuitivt morfologisk vis. Dette viste seg å være ikke helt liketil. Det finnes riktignok mange metoder som kan anvendes til studiet av sirkler, blant annet inveresjonsteori og algebraiske metoder. Disse metodene er imidlertid best egnet til å forstå rent geometriske aspekter ved sirkler, mens de metriske aspektene er ikke så enkle å behandle. Det faktum at mange teoremer knyttet til metriske aspekter ved sirkler er oppdaget og glemt, og siden oppdaget av andre illustrerer at det her ikke foreligger noen samlende teori.

En nøkkel til forståelsen av denne problemstillingen var en bestemt determinantsammenheng mellom sirkler angitt av Artur Cayley. Denne viser hvordan et visst system av sirkler kan forstås ut fra deres metriske aspekter. Disse metriske aspektene var den inverse radien til sirklene, og et bestemt avtandsbegrep knyttet til sirkler. Det lot seg gjøre å utvide denne sammenhengen til å gjelde flere sirkler, og den lot seg også generalisere til et symmetrisk system. Dermed hadde vi en sammenheng som kunne legges til grunn for de fleste metriske teoremene for systemer av sirkler. Det viste seg at også linjer og punkter kunne forstås i dette lys som forvandlede sirkler, slik at metriske sammenhenger mellom sirkler, linjer og punkter kunne forstås på en enhetlig måte. De neste kapitlene viser hvordan vi kommer frem til denne overordnede strukturen.

Ut fra denne determinanten ble det mulig å bearbeide flere andre temaer innen sirkelgeometrien, og i de neste kapitlene har vi gått inn på noen av disse områdene. Blant annet kunne inversjonsteori forstås ut fra denne strukturen, og de fleste aspektene ved de såkalte sirkelkretsene lot seg behandle ut fra den fundamentale determinanten. Også de ikke-euklidske geometrier lot seg belyse på en overraskende måte. Vi har gått relativt detaljert inn på noen av områdene for å vise hvordan den generelle strukturen en svært bevegelig, og ved å spesialisere i ulike retninger kan mange aspekter av ulike geometriske

områder belyses på en enhetlig måte.

I bestrebelsen med å forstå sammenhengene for systemer av sirkler ble det søkt å finne en egnet måte å koordinisere sirkler på for å få grep på området. Flere muligheter ble forsøkt, men vi fant ikke noen tilfredsstillende måte som kunne anvendes til våre problemstillinger. Imidlertid ble et slikt system funnet i omvendt rekkefølge. Ut fra den overordnede strukturen for sirkler oppstod et helt naturlig koordinatsystem. Etter hvert viste dette koordinatsystemet seg å være ekvivalent med det såkalte tetrasykliske eller pentasfæriske koordinatsystem som ble innført av Gaston Darbous i 1873. Dette kunne så anvendes til å bevise fundamentale forhold. Også flere andre sentrale områder i sirkelgeometrien kunne belyses ut fra dette ståsted, blant annet ikke-euklidske geometrier. De siste kapitlene er i fremstillingen er viet studiet av disse emnene.

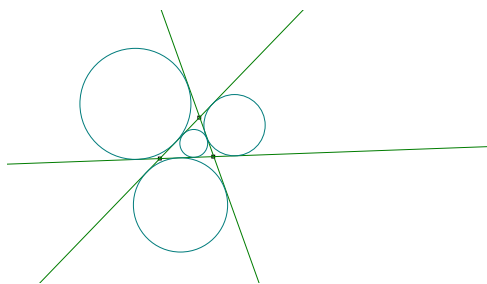
Kapittel 2

Invers radius teoremer

Når vi har med systemer av sirkler å gjøre blir man etterhvert oppmerksom på at den inverse radien til en sirkel spiller en mer betydelig rolle enn den ordinære radien. Dette viser seg naturligvis ikke tydelig i strukturer som har med en sirkel å gjøre, men straks flere sirkler kommer med i bildet vil uttrykkene i alminnelighet bli enklere med de inverse radiene. Disse uttrykkene danner utgangspunktet for våre undersøkelser, og vi vil derfor først kartlegge en del fenomener der dette gjør seg gjeldene. Vi vil begynne med noen elementære sirkelsammenhenger for å få tak i karakteren til dette området.

2.1 Sirkler innskrevet i en trekant

Fenomenet med de inverse radier viser seg allerede når vi ser på sirkler innskrevet i en trekant.



I en trekant kan vi innskrive fire sirkler, en såkalt insirkel som ligger mellom sidene i trekanten, og tre ekssirkler som ligger mellom to sider, og på utsiden

av den tredje. De inverse radiene til disse fire sirklene inngår nå i en enkel lineær relasjon.

Setning 1 *Fire innskrevne setningen* Gitt en trekant, og fire sirkler som berører de tre linjene i trekanten. Radien til den innerste sirkelen som vi kaller insirkel kaller vi r_1 , og til radien til ekssirklene er r_2, r_3 og r_4 . Da har vi følgende relasjon.

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \quad (2.1)$$

Setningen kan vises ved å finne et uttrykk for hver av de fire innskrevne sirklene.

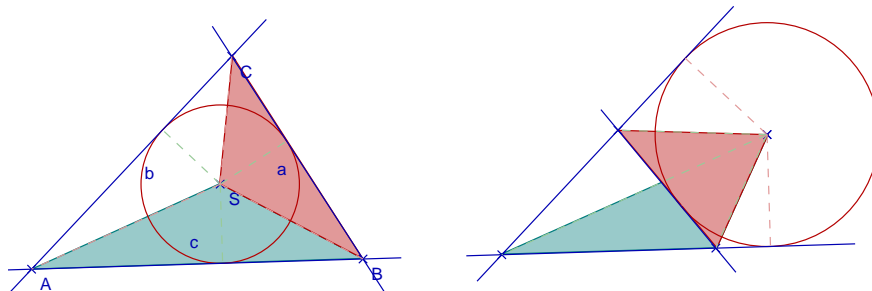
Setning 2 Gitt en trekant ABC med sider a, b og c , og med areal F . Da er radien r_1 til insirkelen gitt ved

$$r_1 = \frac{2F}{a + b + c} \quad (2.2)$$

Radiene til ekssirklene er gitt ved

$$r_2 = \frac{2F}{-a + b + c}, \quad r_3 = \frac{2F}{a - b + c}, \quad r_4 = \frac{2F}{a + b - c}$$

Bevis. Trekanten kan deles i tre mindre trekanter der senteret til insirkelen er et hjørne, og hver av sidene i trekanten er motstående side. Arealet til de små trekantene blir da $F_1 = \frac{ra}{2}$, $F_2 = \frac{rb}{2}$ og $F_3 = \frac{rc}{2}$



Vi setter sammen

$$\begin{aligned}
 F &= F_1 + F_2 + F_3 \\
 \Rightarrow F &= \frac{r_1 a}{2} + \frac{r_1 b}{2} + \frac{r_1 c}{2} = \frac{r_1(a+b+c)}{2} \\
 \Rightarrow r_1 &= \frac{2F}{a+b+c}
 \end{aligned}$$

Når det gjelder eksksirkelene legger vi sammen to av flatene, men trekker fra den som er på utsiden av trekanten, og vi får resultatene over. \diamond

Ut fra dette kan vi vise sammenhengen mellom alle de innskrevne sirkelene.

Bevis. **Fire-innskrevne** Radiene uttrykt ved arealet settes sammen

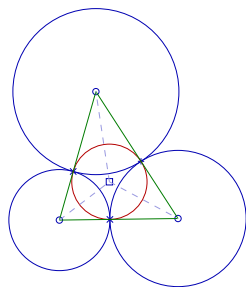
$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{a+b-c}{F} + \frac{a-b+c}{F} + \frac{-a+b+c}{F} = \frac{a+b+c}{F} = \frac{1}{r_1}$$

og vi har vist setningen. \diamond

Radien til insirkelen kan også finnes ut fra *hjørnesirkelene* til trekanten. Dette er sirkelene som har sentrum i hjørnene til trekanten og berører hverandre utvendig. Dette er en vesentlig konfigurasjon, og vi vil se at den har betydning i mange sammenhenger senere.

Setning 3 *Ortogonal sirkel setningen*

Gitt tre sirkler med radius a , b og c som gjensidig tangerer hverandre. Gjennom tangeringspunktene går en fjerde sirkel med radius r . Denne sirkelen vil være ortogonal til de tre andre, og vi kaller den ortogonalsirkelen til disse.



Radien r til ortogonalsirkelen kan da uttrykkes ved

$$r^2 = \frac{a b c}{a + b + c} \quad (2.3)$$

Ved de inverse radier gjelder uttrykket

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a} \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \frac{1}{c} \quad (2.4)$$

Bevis. Trekker vi linjene mellom sentrene til de tre utgangssirklene dannes en trekant, og sirkelen gjennom tangeringspunktene vil være insirkelen i trekanten, og denne vil være ortogonal til de andre sirklene. Denne innser vi hvis vi starter med trekanten og insirkelen. Vi ser da at en sirkel med senter i et hjørne vil kunne gå gjennom to av tangeringspunktene mellom insirkel og sider, og er ortogonal til disse.

Vi uttrykker nå sidene i trekanten med radiene til utgangssirklene

$$a = r_2 + r_3, \quad b = r_1 + r_3, \quad c = r_1 + r_2$$

Arealet uttrykker vi ved herons formel

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_1r_2r_3}$$

Vi setter inn i uttrykket for insirkelen

$$\begin{aligned} r &= \frac{2F}{a + b + c} \\ &= \frac{2\sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_1r_2r_3}}{2(r_1 + r_2 + r_3)} \\ \Rightarrow r^2 &= \frac{r_1r_2r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \end{aligned}$$

og relasjonen er bevist. ◇

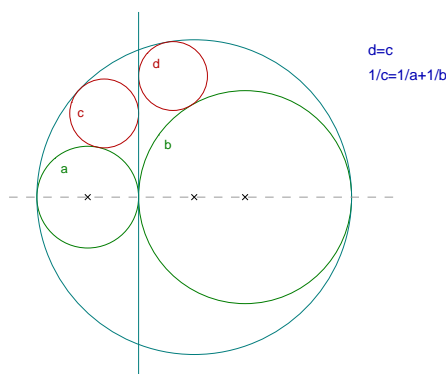
Dette teoremet er en sammenheng som bare inkluderer radier til sirkler, og der lengden av linjestykker og arealer ikke inngår. Dette vil også være tilfellet med de teoremene vi nå skal se på.

2.2 Arbelos teoremer

De inverse radier dukker også opp i studiet av det vi kan kalle en *arbelos*. Denne ble først behandlet av Arkimedes og har siden vært gjenstand for en rekke undersøkelser. Her har vi å gjøre med to sirkler som tangerer hverandre utvendig, og en sirkel med senteret på linje med sentrene til disse, og som akkurat omslutter dem. Linjen mellom senteret kalles vi arbelosens *akse*. Flere forhold er knyttet til denne konstellasjonen, og vi skal se på noen knyttet til inverse radier.

Setning 4 *Arkimedes setning*

Gitt en arbelos og en linje normalt på akse mellom de to utgangssirklene s_1 og s_2 . Vi finner to sirkler som tangerer linjen, den ytre sirkelen, og en av de indre sirkelene. Disse sirkelen vil være like store.



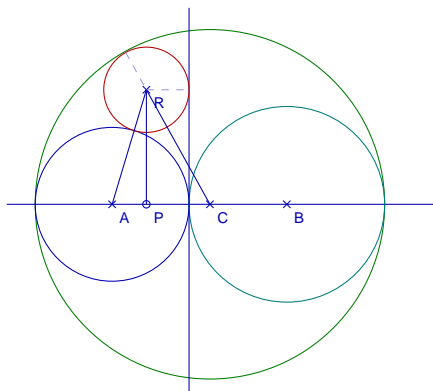
Vi kan begrunne denne setningen ved å finne uttrykk for radiene til disse.

Setning 5 I. arbelossetning.¹ *Gitt en Arbelos ovenfor med utgangssirkler s_1 og s_2 med radier a og b , og en innskreven sirkel med radius r . Da har vi*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

¹Vi kaller setningene knyttet til arbelosen for I., II. og III. arbelossetning. II. arbelossetning beskrives som oftest som et spesialtilfelle av Descartes konfigurasjon.

Bevis. Vi har gitt de tre sirklene med radius a , og b og r . Den omskrevne sirkelen har radius $c = a + b$. Vi kaller sentrene til sirklene A , B og R og senteret til den omskrevne sirkelen C . I tillegg trekker vi normalen fra R til på AB , og kaller fotpunktet P .



Det oppstår da to rettvinklede trekkanter med RP som høyde, nemlig ARP og CRP , og vi kan sette

$$AR^2 - AP^2 = CR^2 - CP^2$$

Vi uttrykker så disse størrelsene med radiene til sirklene. $AR = a + r$, $AP = a - r$, $CR = a + b - r$ og $CP = b - a + c$. Vi setter inn og regner ut

$$\begin{aligned} (a + r)^2 - (a - r)^2 &= (a + b - r)^2 - (b - a + r)^2 \\ \Rightarrow 4ar &= 4ab - 4br \end{aligned}$$

Vi deler på $4abr$ og ordner og får

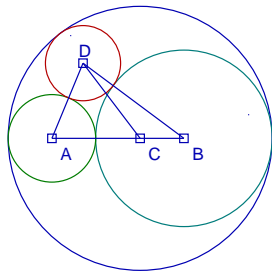
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

◇

Vi ser på en annen sammenheng knyttet til arbelosen.

Setning 6 II. arbelosetning Gitt en arbelos der radiene til de indre sirklene er a og b , og radien til den ytre c . Mellom de tre sirklene ligger en sirkel med

radius d .



Da er relasjonen mellom radiene gitt ved

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \quad (2.5)$$

Denne problemstilling kan gripes an på samme måte som den forrige, men her er ingen rette vinkler slik at Pytagoras setning kan ikke anvendes. Imidlertid finnes en geometrisk setning knyttet til akkurat denne punkt-linje-konfigurasjon. Denne kalles Stewarts setning.

Setning 7 Stewarts setning Gitt en linje med tre punkter A, B og C på samme linje. Utenfor linjen er gitt et fjerde punkt D . Da har vi en sammenheng mellom de ulike avstandene mellom punktene gitt ved

$$(AD)^2 BC + (CD)^2 AB - (BD)^2 AC = AB AC BC \quad (2.6)$$

Vi skal senere vise denne setningen 4.2. Nå anvender vi den på II. arbelosetorem.

Bevis. II.arbelossetning 6 Her er $AD = a+d$, $BC = c-d = a$, $CD = c-d$, $AB = a + b = c$, $BD = b + d$ og $AC = c - a = b$. Innsatt i Stewarts formel og blir dette

$$(a + d)^2 a - (c - d)^2 c + (b + d)^2 b = abc$$

Utregnet får vi

$$abc + abd - acd - bcd = 0$$

Ved å dividere på $abcd$ forenkles dette til et uttrykk med inverse radier

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

◇

I det følgende skal vi se på mange slike sammenhenger, og vi vil derfor bestemme oss for en bestemt notasjon når det gjelder sirkler og radier. Hvis ikke annet sies spesielt vil vi benevne selve sirkelen fra nå av med uthevede typer, mens den inverse radien til sirklene blir skrevet med samme bokstavuttrykk, men med vanlig type. Vi vil også bruke betegnelsen $iradius$ om den inverse radius. Den ordinære radien vil vi i allminnelighet betegne med apostrof.

Definisjon 2.1

$$\textit{Sirkelen } s \rightarrow \mathbf{s} \tag{2.7}$$

$$\textit{Invers radius} \rightarrow \textit{Iradius}(\mathbf{s}) = s \tag{2.8}$$

$$\textit{Ordinær radius} \rightarrow \textit{Radius}(\mathbf{s}) = s' \tag{2.9}$$

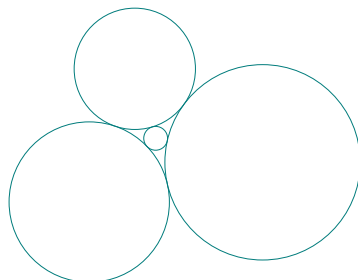
Vi skal nå se på det kanskje mest berømte teorem knyttet til tangerende sirkler og inverse radier.

2.3 Descartes teorem

Dette teoremet ble først behandlet av Descartes i et brev til Prinsesse Elizabeth av Bohemia i 1643. Denne setningen omhandler også fire tangerende sirkler, men her har vi en kvadratisk relasjon mellom iradiene.

Setning 8 *Descartes teorem.*

Gitt fire sirkler a , b , c og d som alle tangerer hverandre gjensidig.



Da er kvadratet til summen av iradiene lik to ganger summen av kvadratene til iradiene.

$$\Rightarrow (a + b + c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \quad (2.10)$$

Enkelheten og symmetrien i denne sammenhengen er det som har opptatt mange matematikere. Den er blitt oppdaget på nytt av flere matematikere, blant annet Fredrick Soddy[?] som skrev setningen som et dikt i 1936. Flere aspekter er behandlet ut fra de ulike synsvinkler, og vi kan her nevne Jakob Steiner[8], Daniel Pedoe[4] og Lagarias, Mallows og Wilks [9]. Selv om teoremet fremstår i en slik enkel form, er det ikke helt rett frem å bevise teoremet. Vi venter derfor med dette til vi har utviklet bedre redskaper.4.3 Imidlertid skal vi se på en del konsekvenser av setningen. Descartes teorem er nemlig utgangspunktet for en hel rekke andre teoremer som involverer tangerende sirkler og inverse radier, og slike sammenhenger er behandlet av flere.

Løser vi Descartes teorem med hensyn på en av de variable får vi en annengradsligning og dermed to løsninger.

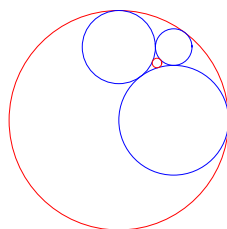
$$d = a + b + c \pm 2\sqrt{ab + ac + bc} \quad (2.11)$$

Den ene løsningen representerer sirkelen som ligger mellom de tre tangerende sirklene, og den andre representerer sirkelen som omslutter dem. Den som omslutter vil ha negativ radius, og det henger sammen med at denne sirkelen omslutter de andre, i motsetning til den indre som ligger på utsiden av disse. Dette forhold blir behandlet grundig i neste kapittel.

Noen konsekvenser av denne løsningen av Descartes teorem følger umiddelbart.

Setning 9 *Descartes II.teorem*

Gitt tre sirkler a , b og c . Mellom disse legger vi en sirkel d , og omkring dem en sirkel e .



Da er summen av iradiene til den indre og ytre lik to ganger summen av iradiene til de andre sirklene.

$$d + e = 2(a + b + c) \tag{2.12}$$

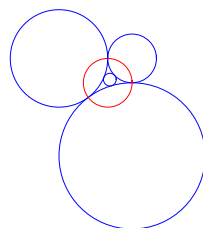
Bevis. Vi legger sammen de to løsningene fra ligning 2.11 og resultatet oppstår. \diamond

Dette forhold har betydning når det gjelder å finne heltallsløsninger av Descartes teorem.

En annen sak vi kan legge merke til i løsningsuttrykket 2.11 er at vi ved kvadratrotuttrykket har gitt den ortogonale sirkelen 3 til de tre utgangssirklene. Dette gir opphav til enda en sammenheng.

Setning 10 *III. Descartesteorem.*

Gitt gitt fire sirkler a , b , c og d i en descarteskonstellasjon. En sirkel r er ortogonal til a , b og c , og vi sier at den er komplementsirkel til d .



Da har vi

$$r = \frac{-a + b + c + d}{2} \tag{2.13}$$

Bevis. Dette kommer også umiddelbart ut av løsningsligningen for Descartes, vi erstatter rotuttrykket med r , og ordner med hensyn på denne størrelsen.

$$\begin{aligned} d &= a + b + c - \sqrt{ab + ac + bc} \\ &= a + b + c - 2r \\ \Rightarrow r &= \frac{a + b + c - d}{2} \end{aligned}$$

og forholdet er bevist. ◇

Den ortogonale sirkelen til tre sirkler blir dermed lineært uttrykt når vi har gitt den fjerde descartessirkelen.

Det er nå å bemerke at vi får fire komplementsirkler i alt. Vi kan ha en ortogonasirkel til hver triplett av sirkler, og disse vil være komplementære til en fjerde. Dette forholdet viser seg å være resiprokt, de fire opprinnelige sirklene er omvendt ortogonale til den fire resiproke. Dette er forbundet med en viss tallsammenheng.

Definisjon 2.2 *Gitt fire tall a, b, c og d . Da finner vi komplementtallet til \bar{a} ved*

$$\bar{a} = \frac{-a + b + c + d}{2}$$

og tilsvarende for de andre tallene.

Vi kan gå den andre veien, fra komplementtallene til de opprinnelige på samme måte. Dette finnes rent algebraisk.

Fire vilkårlige tall og fire komplementtall har flere rent tallmessig sammenhenger. For eksempel har vi

$$a + b + c + d = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$$

og

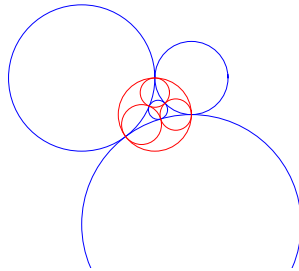
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + \bar{d}^2$$

Dette finner vi også med elementær algebra. Et forhold som imidlertid er knyttet til descarteskonfigurasjonen har vi ved.

Setning 11 IV. Descartesteorem.

Gitt fire sirkler a, b, c og d og de fire komplementssirklene $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ og \bar{d} . Da gjelder

$$a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d} = 0 \quad (2.14)$$



Bevis. Vi viser at uttrykket er ekvivalent med Descartes teorem når vi uttrykker komplementtallene med de opprinnelige tallene. \diamond

Vi gir et eksempel som illustrerer de ulike setningene.

Eksempel 2.1 Gitt tre sirkler r_1, r_2 og r_3 med ordinær radius 1, 2 og 3 som gjensidig tangerer hverandre. De inverse radier er da gitt ved $1, \frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3}$. Vi skalerer opp med en faktor 6 og sier at de inverse radiene er gitt ved $r_1 = 6, r_2 = 3$ og $r_3 = 2$. Vi bruker da Descartes 1.teorem til å finne sirkelene som tangerer de tre.

$$(x^2 + 6^2 + 3^2 + 2^2) = 2(x^2 + 6^2 + 3^2 + 2^2) \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 23$$

Her ser vi at Desargues 2. teorem holder fordi $(23 - 1) = 22 = 2(6 + 3 + 2)$. Videre kan vi finne ortogonalsirkelen til de tre opprinnelige direkte.

$$r = \sqrt{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} = \sqrt{6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2} = \pm 6$$

Det samme finner vi hvis vi bruker resultatet over

$$s_4 = \frac{r_1 + r_2 + r_3 - r_4}{2} = \frac{6 + 3 + 2 - 23}{2} = -6$$

Bruker vi $r_4 = -1$ blir resultatet $s_4 = 6$. Går vi videre med $r_4 = 23$ finner vi

$$s_1 = \frac{-6 + 3 + 2 + 23}{2} = 11, s_2 = \frac{6 - 3 + 2 + 23}{2} = 14, s_3 = \frac{6 + 3 - 2 + 23}{2} = 15$$

Og til slutt ser vi at Descartes 4.teorem holder

$$r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 + r_4 s_4 = 6 \cdot 11 + 3 \cdot 14 + 2 \cdot 15 + 23 \cdot -6 = 0$$

2.4 Heltallsforhold

En av grunnene til at man har vært opptatt av Descartes konfigurasjon er at det finnes flere tallteoretiske fenomen knyttet til denne. Det finnes blant annet flere fremstillinger som gir hele tall som for Descartersirklene. En fremstilling fremstår enkelt ved fire tall og deres komplementtall.

Setning 12 *Gitt fire tall a, b, c og d , og komplementtallene $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ og \bar{d} til disse. Da vil fremstillingen*

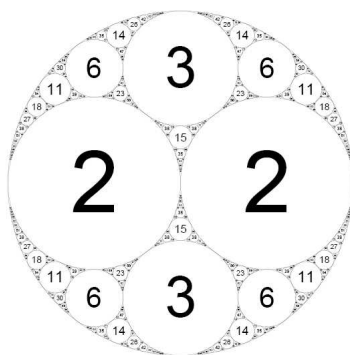
$$r_1 = a\bar{c} + c\bar{b}, r_2 = b\bar{d} + d\bar{a}, r_3 = c\bar{d} - a\bar{a}, r_4 = d\bar{c} - b\bar{b}$$

gi fire tall som gir iradiene i en Descartessammenheng. Komplementsirklenes iradier er gitt ved

$$s_1 = b\bar{a} - d\bar{d}, s_2 = a\bar{b} - c\bar{c}, s_3 = b\bar{c} + d\bar{b}, s_4 = a\bar{d} + c\bar{a}$$

Bevis. Setter vi inn disse uttrykkene i for eksempel Descartes IV. teorem, og deretter setter inn uttrykkene for komplementtallene 2.2, vil resultatet bli 0.◊

Når en heltallsfremstilling er funnet, så kan nye sirkler sirkler legges mellom tre sirkler av sirklene, og denne sirkelen vi også ha et helt tall som invers radius. Dette følger av Descartes II.teorem. Når vi har lagt inn nye, kan vi fortsette prosessen med stadig nye sirkler.



Det oppstår ved dette en type fraktal og den kalles en *Apolloniuskurv*(gasket).

I forbindelse med heltallskonfigurasjoner har man funnet at også sentrene til sirklene er rasjonale i forhold til hverandre. Dette henger sammen med et spesielt teorem, det såkalte komplekse Descartesteorem. Dette er et relativt nytt teorem funnet av Legaris, Mallows og Wilks [9].

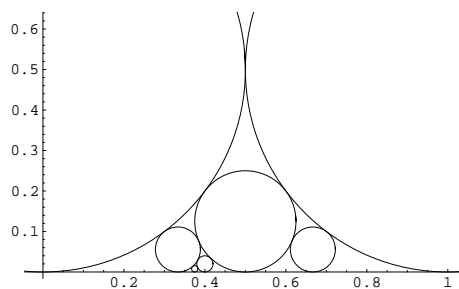
Setning 13 *Kompleks Descartes Teorem*

Gitt fire sirkler $s_1 - s_4$. Sentrene til sirklene er gitt ved de komplekse tallene $z_1 - z_4$, og de inverse radiene angir vi som vanlig ved $s_1 - s_4$. Da vil Descartes teorem gjelde for produktet av senteret og iradien på samme måte som for iradien.

$$\Rightarrow (z_1 s_1 + z_2 s_2 + z_3 s_3 + z_4 s_4)^2 = 2(z_1 s_1^2 + z_2 s_2^2 + z_3 s_3^2 + z_4 s_4^2) \quad (2.15)$$

Dette forhold kan utvides til å gjelde de andre descartesteoremene, og også andre sirkelteoremer. Disse forholdene vil kunne betraktes på elementært vis mot slutten av denne fremstillingen. [13.5](#)

En annen bemerkelsesverdig tallteoretisk sammenheng knyttet til tangerende sirkler er det man kaller Ford-sirkler etter oppdageren. Vi har her gitt to sirkler s_1 og s_2 som tangerer tallinjen, begge med iradius 2 der den ene tangerer i punktet 0 og den andre i punktet 1. Vi legger en sirkel s_3 mellom de to som også tangerer linjen. Denne vil da tangere i punktet $1/2$. En sirkel s_4 mellom denne og den første vil berøre i punktet $1/3$, mens sirkelen s_5 mellom s_3 og s_2 vil berører linjen i punktet $2/3$.



Det finnes da en enkel regneregel for å komme frem til tangeringspunktene. Er tangeringspunktet til en sirkel gitt ved $\frac{a_1}{b_1}$ og en tangerende til denne med $\frac{a_2}{b_2}$ vil sirkelen som tangerer disse berøre i punktet $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$. Følgen som her fremkommer kalles en Feray følge.. Iradiene til sirklene er alltid gitt ved $2n^2$ der n er nevneren i berøringsbrøken. Det er også slik at for et hvert rasjonalt $a \in [0, 1]$ finnes en Ford sirkel. Denne sammenheng vil vi også først gå nærmere inn på i et senere kapittel. [13.5](#)

Ved dette har vi sett på en rekke teoremer knyttet til tangerende sirkler og inverse radier. Dermed har vi en basis for de videre undersøkelsene.

Kapittel 3

Morfologiske overganger

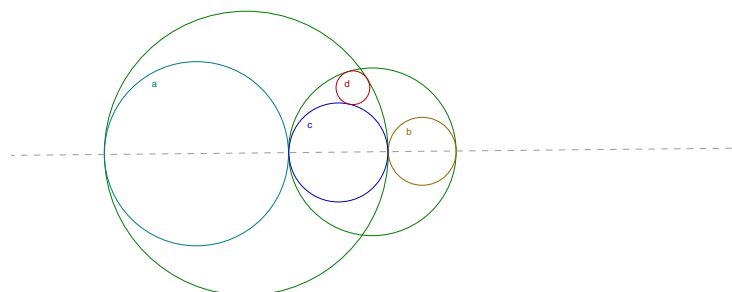
Vi har brakt frem en del sirkelteoremer på rent konstruktivt vis. Ved kombinasjoner av ulike lovmessigheter har vi kunnet danne ulike teoremer. Vi skal nå gjøre de første skritt i det som er et hovedtema i denne behandlingen av sirkler, nemlig hvordan ulike teoremer henger sammen på morfologisk vis. Dette vil si at vi gjør kontinuerlige bevegelser med sammenhenger av sirkler, og ser hvordan de derved endrer karakter. Det kan blant annet være at to sirkler faller sammen til en, at symmetriske situasjoner oppstår, eller at sirkler blir til en linje. Denne siste bevegelsen er den mest iøynefallende innledningsvis når det gjelder morfologiske overganger.

3.1 Linjedannelse

Ved behandlingen av de to løsningene til Descartes så vi at den omsluttende sirkelen fikk negativ radius. Vi skal se hvordan det går til at vi kan snakke om positive og negative radier til en sirkel. Vi tar utgangspunkt i et teorem som vi skal se er en syntese av de to arbelosteoremene.

Setning 14 *Gitt tre sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} med sentre på en felles linje. De tre sirklene ligger på rad, slik at \mathbf{a} og \mathbf{c} tangerer \mathbf{b} utvendig. En sirkel \mathbf{r} har senter på samme linje og omslutter akkurat \mathbf{a} og \mathbf{b} , og en sirkel \mathbf{s} omslutter*

på samme vis b og c . Mellom b , r og s her vi sirkelen d .



Da er relasjonen mellom iradiene til a , b , c og d gitt ved

$$d = a + b + c \tag{3.1}$$

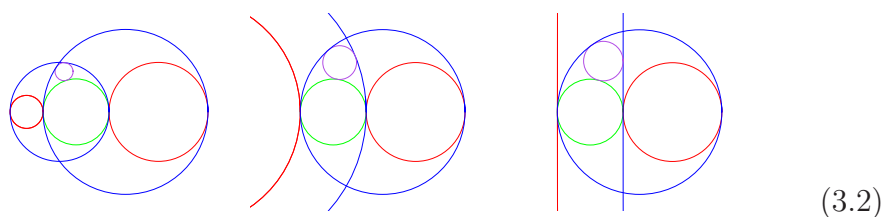
Vi kaller dette teoremet *3.Arbelosteorem*. Vi kan bevise denne setningen ved å anvende Stewarts formel slik vi har gjort tidligere. I de videre betraktningene vil vi imidlertid se at vi kan betrakte den fra et utvidet synspunkt, og vi vil derfor vente med beviset. Nå skal vi se hvordan vi kan gå over til de to andre arbelosteoremene.

Utvikling 3.1 Fra 3. til 1. og 2.Arbelosteorem

Vi tar utgangspunkt i 3. arbelosterem.

$$d = a + b + c$$

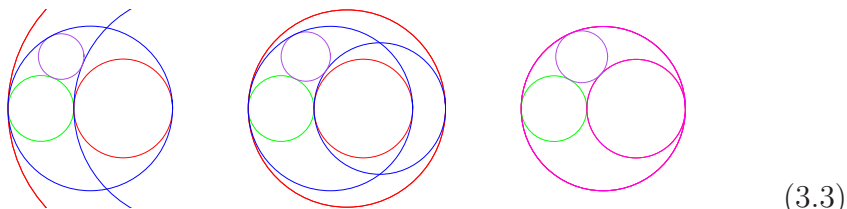
Vi lar så sirkel a utvide seg slik at den etterhvert blir til en linje. Den ene av appoloniussirklene vil da også bli uendelig stor.



Den inverse radien til a blir dermed 0, og vi oppnår 1. arbelos teorem.

$$d = b + c$$

Vi lar nå sirkelen bøye seg andre veien. Vi finner da at iradien til \mathbf{a} blir negativ. Vi fortsetter denne bevegelsen til sirkel \mathbf{a} faller sammen med sirkelen som omslutter \mathbf{b} og \mathbf{c} .



Vi har dermed kommet frem til arbelosen, og relasjonen mellom iradiene er gitt ved

$$d = -a + b + c$$

Denne typen overgang ser vi i mange situasjoner. Vi kan formulere det i en setning.

Setning 15 *Gitt en algebraisk sammenheng mellom iradiene til en konstellasjon av sirkler. Den ene av sirklene endrer seg og blir til en linje, og videre til en sirkel som krummer andre den andre veien. Iradien til sirkelen vil da skifte fortegn, og verdien for linjen er 0.*

I senere betraktninger skal vi se at begrunnelsen for dette blir elementær. Vi skal se på noen andre overganger.

Utvikling 3.2 *Vi tar utgangspunkt i Descartes 2. teorem. Her har vi tre utgangssirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} , en innskrevet sirkel \mathbf{d} og en omskrevet sirkel \mathbf{e} . Relasjonen mellom iradiene er gitt ved*

$$d + e = 2(a + b + c)$$

Vi lar nå den ene utgangssirkelen bli mindre slik at den beveger seg inn mellom de to andre. Da vil den innskrevne sirkelen bli stadig mindre, mens sirkelen omkring vokser. Det oppstår etterhvert et grensetilfelle der den omskrevne sirkelen blir til en linje. Iradien til denne blir 0, og vi får et uttrykk mellom den fire andre sirklene

$$d = 2(a + b + c)$$

Descartes teorem selv kan endres ved at et av elementene blir til linje. Da blir iradien til dette elementet 0, og bare iradiene til de tre andre gjør seg gjeldende i uttrykket.

Setning 16 *Gitt to sirkler \mathbf{a} og \mathbf{b} , som begge tangerer samme linje \mathbf{c} og som tangerer hverandre. Mellom disse elementene legger vi en ny sirkel \mathbf{d} , og forholdet mellom de inverse radiene kan uttrykkes ved*

$$(a + b + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + d^2)$$

Dette uttrykket kan omformes til

$$\sqrt{d} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Denne sammenhengen finner vi også enkelt ved å betrakte tangentialavstanden mellom sirklene.

Vi har altså sett flere eksempler på at forholdene forenkles når sirkler blir linjer. Med dette i mente kan vi se på konstellasjoner av sirkler som også inneholder linjer, og hypotetisk tenke oss at disse går over til sirkler. Flere sammenhenger fremkommer syntetisk på dette viset. Vi skal se spesifikt på to relativt omfattende strukturer av sirkler som hver involverer åtte sirkler.

Det første av disse er en syntese av 3. Arbelosteorem, 2. Descartesteorem, og teoremet med fire innskrevne sirkler i en trekant.

3.2 Åttesirkelteoremet

Vi utvikler det vi kaller Åttesirkelteoremet ut fra teoremet med fire innskrevne sirkler. Vi betenker først at dette å finne fire sirkler som berører tre linjer er et spesialtilfelle av Appolonius problem. Oppgaven her er å konstruere sirkler som berører tre gitte sirkler. I det generelle tilfellet viser det seg at det finnes i alt åtte ulike løsninger på problemet. Når utgangsirklene blir uendelig store og utarter til linjer vil fire av appolloniussirklene bli uendelig store og falle ut av sammenhengen.

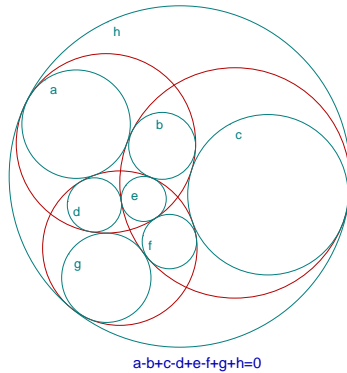
Når det er en relasjon mellom iradiene til de fire innskrevne sirklene i en trekant, da er det naturlig å søke en slik relasjon mellom de åtte sirklene. Det viser seg at en slik forbindelse eksisterer.

Setning 17 *Åttesirkelteoremet.*

Gitt tre sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} , og åtte sirkler $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_8$ som hver berører de føste tre. Vi sier at tangeringen mellom to sirkler er negativ når sirklene tangerer hverandre utvendig, og positiv hvis sirklene omslutter hverandre. Hver radius

$r_1 - r_8$ her et fortegn. Dette er produktet av de tre berøringene med sirklene **a**, **b** og **c**. Da gjelder relasjonen mellom iradiene til appoloniussirklene.

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 + r_8 = 0 \quad (3.4)$$



(3.5)

Vi skal ikke heller ikke bevise denne setningen umiddelbart, men vise noen konsekvenser. Vi kan nemlig knytte en hel rad andre teoremer til dette på morfologisk måte. Som vi nettopp har sett henger det sammen med fireinnskrevne teoremet ved at de tre utgangssirklene blir til linjer. Et annet teorem som fremkommer ganske umiddelbart er Descartes 2. teorem 2.12. Her er det ingen sirkler som blir til linjer, men et annet forvandlingstema som gjør seg gjeldende, nemlig at to sirkler faller sammen.

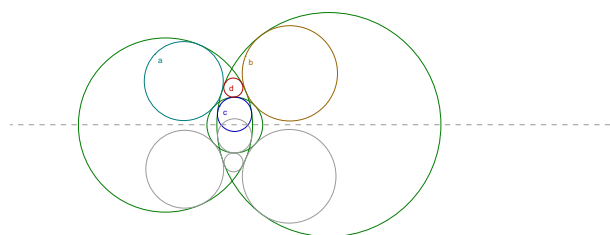
Utvikling 3.3 *Gitt åttesirkelteoremet. Vi lar nå de tre utgangssirklene gå mot hverandre, slik at de til slutt tangerer hverandre. To og to av de åtte appoloniussirklene $s_1 - s_6$ vil da legge seg rundt hver av disse sirklene, og etterhvert bli lik dem. De to siste sirklene vil henholdsvis legge seg mellom de tre sirklene og omkring dem. Sirklene som blir lik utgangssirklene vil få positiv radius fordi de har en positiv tangering til den omslutter, og to negative til dem de tangerer utvendig. Den ytre sirkelen vil også ha positivt fortegn fordi den omslutter alle tre sirklene. Den innskrevne sirkelen vi imidlertid har negativt fortegn fordi den har tre negative tangeringer. Vi har da relasjonen*

$$2a + 2b + 2c + t_1 - t_2 = 0 \quad (3.6)$$

og ved ordning får vi 2.Descartesteorem.

Vi avslutter behandlingen av åttesirkelteoremet ved å se hvordan det går over til 3. arbelosteorem for å se litt til av rekkevidden til teoremet.

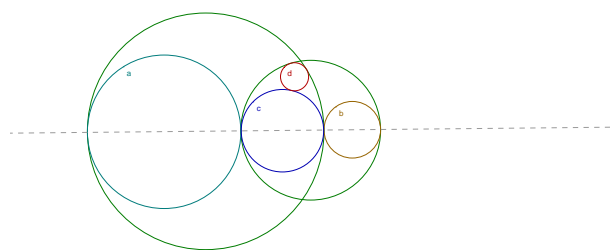
Utvikling 3.4 *Vi starter med en variant av åttesirkelteoremet der de sentrene til de tre utgangssirklene ligger på samme linje. Da vil vi på grunn av symmetrien ha to og to appoloniussirkeler med samme radius. Sammenhengen mellom iradien blir da reusert til en sammenheng mellom fire iradier.*



(3.7)

$$d = a + b + c \quad (3.8)$$

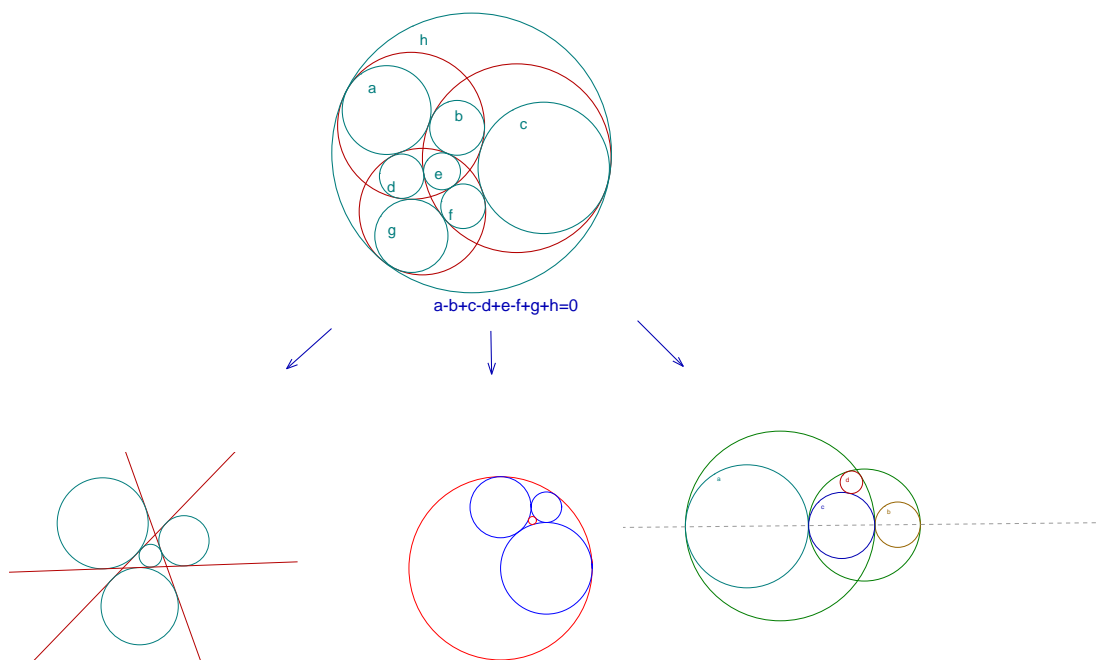
Vi lar nå de to ytre utgangssirkelen nærme seg dem midterste slik at de til slutt atngerer denne. Den ene appoloniussirkelen vil da bli ett med den midtersete



(3.9)

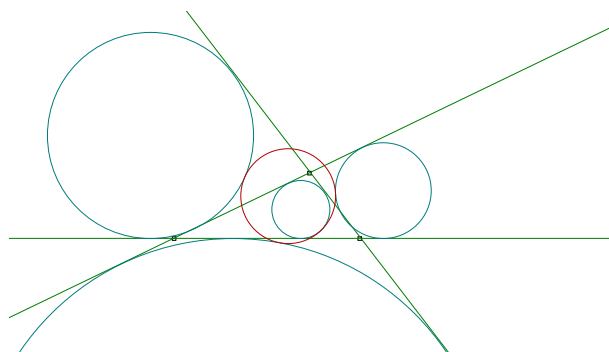
$$d = a + b + c \quad (3.10)$$

Vi kan lage en oversikt over noen av teoremene ut fra åttesirkelteoremet.



3.3 Hartsirkler

Tidligere betraktet vi den algebraiske sammenhengen mellom fire innskrevne sirkler 2.1. I tillegg til den algebraiske relasjonen har vi et overraskende rent geometrisk forhold som forbinder de fire sirklene. De er nemlig alle tangent til enda en sirkel, den såkalte nipunktsirkelen til en trekant.

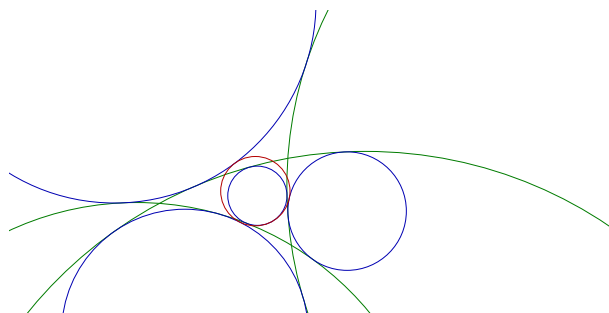


(3.11)

Det finnes altså en sirkel som tangerer de tre ytre sirkelene utvendig, og som omslutter den indre sirkelen. En rekke andre forhold er også knyttet til denne nipunktsirkelen, men vi vil her konsentrere oss om nettopp det forhold vi har pekt på.

Studerer vi nærmere selve sammenhengen med trekanten, de fire innskrevne sirkelen, og nipunktsirkelen vil visse symmetrier vise seg. Vi kan iaktta at hvert av elementene tangerer nøyaktig fire andre. Nipunktsirkelen tangerer fire sirkler. De øvrige sirkelene tangerer tre linjer og nipunktsirkelen, og linjene tangerer fire sirkler. Det er også slik at elementene er delt i to grupper på fire hver, der alle elementene fra den ene gruppen tangerer alle fra den andre gruppen. Symmetrien brytes ved at i den ene gruppen har vi å gjøre med fire sirkler, mens i den andre er det en sirkel og tre linjer. Det viser seg at dette kan generaliseres til to grupper med fire sirkler i hver.

I stedet for å begynne med tre linjer kan vi danne en sirkeltrekant med tre sirkler, finne fire innskrevne sirkler, og vi vil da se at enda en sirkel tangerer disse fire.



Denne siste sirkelen kalles *Hartsirkelen* etter oppdageren. Imidlertid vil alle sirkelene kunne være Hart-sirkel fordi det er en fullkommen symmetri mellom sirkelene. Fire sirkler tangerer fire andre.

Når vi har tre sirkler som utgangselementer er jo de innskrevne sirkelene egentlig appollonius-sirkler. Disse er det jo åtte av i alt, og de opptrer to og to i fire par. Løser man appoloniusproblemet geometrisk oppstår disse fire parene helt naturlig. Vi definerer et *appoloniuspar* morfologisk.

Definisjon 3.1 *Gitt tre sirkler på med sentrene på samme linje. To appollonius-sirkler til disse danner et appolloniuspar når de er speilinger av hverandre over linjen. De to vil så også være appoloniuspar når de tre utgangssirkelene beveges slik at de ikke lenger ligger på linje.*

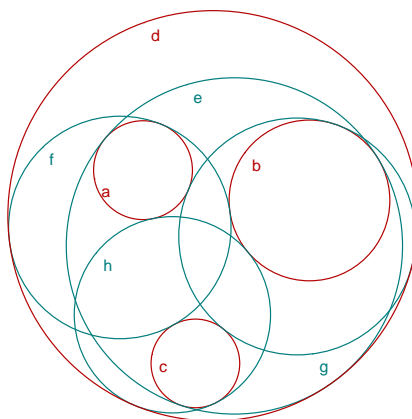
Vi kan da formulere Harts sirkel teorem.

Setning 18 Harts sirkel teorem Gitt tre sirkler s_1, s_2 og s_3 . Vi finner fire sirkler t_1, t_2, t_3 og t_4 som tangerer disse, hvorav ingen er appoloniuspar. Da finnes en sirkel s_4 som tangerer t_1, t_2, t_3 og t_4 .

Det som angår oss mest i denne sammenheng er at vi også kan generalisere den algebraiske sammenhengen mellom sirklene. Vi kan nemlig danne produkter av de inverse radiene til to og to sirkler som tangerer hverandre, og disse produktene inngår i en enkel relasjon. Vi kan sette dette opp som en setning.

Setning 19 Hart-radius teorem

Gitt fire sirkler r_1, r_2, r_3 og r_4 som hver tangerer fire andre s_1, s_2, s_3 og s_4 i en Hart-konstellasjon.



$$ae+af-ag-ah-bf+be+bg-bh- \\ cf+ce-cg+ch+de+df+dg+dh=0$$

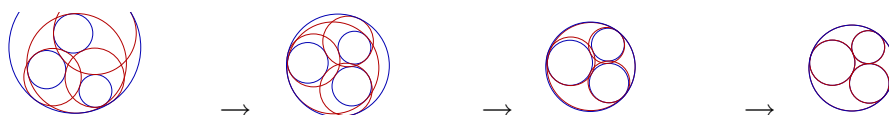
Vi danner nå produkter av en sirkel fra den ene, og en sirkel fra den andre gruppen. Produktene har fortegn. Tangerer sirkelen hverandre utvendig er produktet negativt, og omslutter de hverandre er produktet positivt. Summen av alle produktene blir da 0.

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 r_i s_j \cdot f(r_i, s_j) \tag{3.12}$$

Dette er også her et symmetrisk og omfattende teorem. Det skiller seg fra Åttesirkelteoremet ved at leddene her er av andre grad, mens åttesirkel teoremet er lineær. Denne setningen spesialiseres til teoremet med fire innskrevne sirkler når tre av sirklene i den ene gruppen blir linjer. Alle produktene som involverer disse sirklene blir da null, og vi står igjen med produktene fra den siste sirkelen til de andre sirklene. Iradien til denne kan imidlertid deles ut fordi den inngår i alle uttrykkene, og vi får da en lineær sammenheng.

Teoremet spesialiseres også Descartes teorem ved at alle sirklene fra den ene gruppen faller sammen med sirklene fra den andre gruppen.

Utvikling 3.5 *Gitt en Hartstruktur med 8 sirkler. Vi lar de fire sirklene falle sammen med de fire andre.*



$$ae + af + ag + ah + be + bf - bg - bh + ce - cf + cg - ch + de - df - dg + dh = 0$$

$$(e, f, g, h) \rightarrow (a, b, c, d)$$

$$\Rightarrow a^2 + ab + ac + ad + ba + b^2 - bc - bd + ca - cb + c^2 - cd + da - db - dc + d^2 = 0$$

Dette går over til Descartes teorem ved ordning.

Selv om Åttesirkelteoremet og Hart-radiusteorem hører naturlig hjemme i fenomenområdet med tangerende sirkler har vi ikke kunnet finne dem i litteraturen.

Ved dette har vi gjennomgått en rekke sirkelteoremer for kartlegge området videre, og for å vise slektskapet mellom de ulike teoremene ved bevegelige overganger. Vi har også vist hvordan vi har kunnet finne nye generelle teoremer ut fra rent syntetiske overveielser. Imidlertid har vi ennå ikke bevist de grunnleggende teoremene, og vi vil nå ta mer systematisk fatt på dette.

Kapittel 4

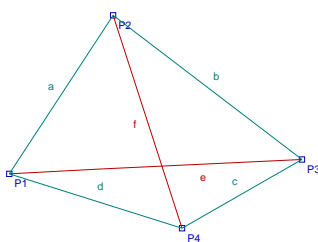
Punktrelasjoner

Vi kunne anvende Stewarts teorem til å finne sammenhengen mellom radiene i arbelos-teoremene. Her dannet vi punkt-linjestruturer ut fra sirklenes senter, og ved å uttrykke avstandene mellom sentrene med radiene fant kunne vi utvikle teoremene. Denne metoden kan vi utvide til å gjelde det generelle Descartesteoremet. Dette innebærer imidlertid å bruke en sammenheng mellom punkter der disse ligger fritt i forhold til hverandre.

4.1 Avstandsrelasjon mellom fire punkter.

Pytagoras setning og Stewarts setninger er relativt oversiktlige. Når vi har å gjøre med de seks avstandene mellom fire vilkårlige punkter får vi et komplisert uttrykk av 6 grad.

Setning 20 *Gitt fire vilkårlige punkter $P_1 - P_4$ med avstandene $a - f$ slik som vi ser på illustrasjonen.*



(4.1)

Relasjonen mellom disse avstandene er da gitt ved

$$a^4 c^2 - a^2 b^2 c^2 + a^2 c^4 - a^2 b^2 d^2 + b^4 d^2 - a^2 c^2 d^2 - b^2 c^2 d^2 + b^2 d^4$$

$$\begin{aligned}
& - a^2c^2e^2 + b^2c^2e^2 + a^2d^2e^2 - b^2d^2e^2 + a^2b^2f^2 - a^2c^2f^2 - b^2d^2f^2 \\
& + c^2d^2f^2 - a^2e^2f^2 - b^2e^2f^2 - c^2e^2f^2 - d^2e^2f^2 + e^4f^2 + e^2f^4 = 0
\end{aligned}$$

På determinantform blir uttrykket:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & e^2 \\ 1 & a^2 & 0 & f^2 & d^2 \\ 1 & b^2 & f^2 & 0 & c^2 \\ 1 & e^2 & d^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

Denne sammenheng kalles Cayley-Menger determinanten.¹ For å bevise sammenhengen benytter vi matrisemultiplikasjon og andre matriseoperasjoner.

Bevis. Vi starter med to determinanter som vi vil multiplisere med hverandre. Determinantene inneholder rader der alle ledd er null, og verdiene deres blir 0. Produktdeterminanten til disse vil da ha også verdien 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_3 & y_3 & 1 & 0 \\ 0 & x_4 & y_4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1^2 + y_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 & x_1x_3 + y_1y_3 & x_1x_4 + y_1y_4 \\ 1 & x_1x_2 + y_1y_2 & x_2^2 + y_2^2 & x_2x_3 + y_2y_3 & x_2x_4 + y_2y_4 \\ 1 & x_1x_3 + y_1y_3 & x_2x_3 + y_2y_3 & x_3^2 + y_3^2 & x_3x_4 + y_3y_4 \\ 1 & x_1x_4 + y_1y_4 & x_2x_4 + y_2y_4 & x_3x_4 + y_3y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

Siden verdien av determinanten er 0 kan vi multiplisere alle kolonnene og radene med en konstant. I tillegg har vi de vanligste matriseoperasjoner der særlig det forholdet at vi kan summere to rader eller to kolonner gjør seg gjeldende.

Vi starter med å multiplisere alle verdiene i rad 1-4 med -2, og deretter dele med -2 i første kolonne. Vi har da oppnådd at alle uttrykkene er blitt dobbelt så store, mens første rad og kolonne inneholder enere. Vi multipliserer

¹Cayley oppdaget den i 1841, og Menger brukte den senere til en reformulering av Euklidsk geometri. Determinanten bestemmer forholdene i et punktrom, og når determinanten blir 0 kalles systemet flatt.

så første kolonne med x_1^2 , og legger denne til kolonne to. Deretter deler vi kolonne 1 med x_1^2 . Vi gjentar akkurat samme prosess med y_1^2 . Hele denne prosessen går vi så igjennom med x_2^2 og y_2^2 med hensyn på kolonne 2, og slik fortsetter vi gjennom alle kolonnene. Når vi er ferdig med kolonnene gjør vi det samme for radene. Til slutt har vi oppnådd at vi for rad 2 kolonne 4 har uttrykket $x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2$ og tilsvarende for de andre. Dette kan skrives som $(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2$ som er avstanden mellom punktene P_1 og P_3 . Gjør vi samme operasjonen for hele determinanten får vi

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 & \dots \\ 1 & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 & & 0 & \dots \\ 1 & x_1^2 - x_1x_3 + x_3^2 + y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2 & & x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 + y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2 & 0 \\ 1 & \dots & & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 & (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \\ 1 & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 & & 0 & (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \\ 1 & (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2 & & (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 & & (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_3)^2 & (x_3 - y_4)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Setter vi avstandene mellom punktene slik vi har gitt det over har vi resultatet

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & e^2 \\ 1 & a^2 & 0 & f^2 & d^2 \\ 1 & b^2 & f^2 & 0 & c^2 \\ 1 & e^2 & d^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

og setningen er vist. \diamond

Dermed er en helt generell sammenheng som forbinder avstandene mellom fire vilkårlige punkter fremkommet. Vi skal etterhvert se hvordan vi anvender dette til sirkelproblemer, men ser først på noen spesielle punktvarianter som oppstår fra den generelle.

4.2 Spesielle punktteoremer

Slik som vi kunne danne spesielle sirkelteoremer av mer generelle kan vi begrunne spesielle punktteoremer med denne overordnede setningen. Vi vil dermed få beviser for blant annet Stewarts teorem og Herons formel som er anvendt uten bevis tidligere.

Det første vi ser på er når punktene er hjørnene i et rektangel.

Setning 21 Pytagoras teorem.

Gitt et rektangel med sider a og b , og diagonal c . Da er disse størrelsene relatert ved

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bevis. To og to av avstandene mellom punktene blir like store, og vi kan sette dette inn i determinanten.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

Utregnet og faktorisert oppstår uttrykket

$$(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2) = 0 \quad (4.5)$$

Dette er Pytagoras setning i tre varianter alt etter hvilke linjestykker som danner diagonalene. \diamond

Gjør vi en liten modifikasjon av denne strukturen ved at et par motstående sider får ulik lengde, oppstår to ulike setninger.

Setning 22 Gitt fire punkter der to par motstående avstander a og b er like lange, mens det tredje paret c og d er ulike. Dette gir to ulike firkanter. På den ene siden får vi et likesidet trapes der forholdet mellom sidene er gitt ved

$$a^2 - b^2 = cd$$

På den andre siden får vi et parallelogram der forholdet mellom sidene er gitt ved

$$2a^2 + 2b^2 = c^2 + d^2$$

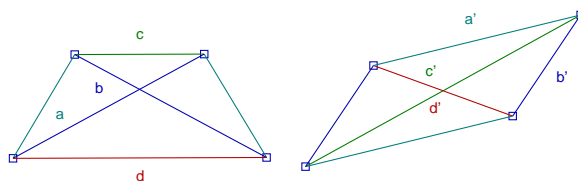
Bevis. Determinantuttrykket for en firkant der to par motstående sider like lange blir:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & d^2 & b^2 \\ 1 & b^2 & d^2 & 0 & a^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

Utregnet blir dette ²

$$(a^2 - b^2 - cd)(a^2 - b^2 + cd)(2a^2 + 2b^2 - c^2 - d^2) = 0 \quad (4.7)$$

Faktorene i uttrykket representerer de ulike geometriske uttrykkene. Faktorene på formen $a^2 - b^2 + cd = 0$ viser hen på et likesidet trapes. Her er to av sidene og de to diagonalene like, mens to sider er ulike. Faktoren $2a^2 + 2b^2 - c^2 - d^2 = 0$ er uttrykk for sammenhengen mellom sidene og diagonalene i et parallellogram. Her er to par sider like, mens diagonalene blir forskjellige.

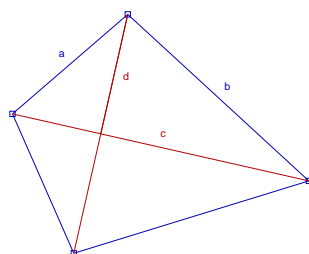


(4.8)

Vi har altså i denne sammenhengen to ulike formler i samme uttrykk. \diamond

Vi kan også vise Herons formel ved å danne en spesiell firkant.

Bevis. Herons formel. Vi lar her de fire punktene ligge slik at to av dem er speilinger av hverandre over linjen mellom de to andre.



(4.9)

Vi har da en dragefigur der to og to av sidene er like lange.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & a^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & d^2 & b^2 \\ 1 & b^2 & d^2 & 0 & b^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & b^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.10)$$

²Disse determinantene lar seg raskt regne ut i mathematica eller er annet matematikkprogram. Faktoriseringen likeså.

$$c^2d^2 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0$$

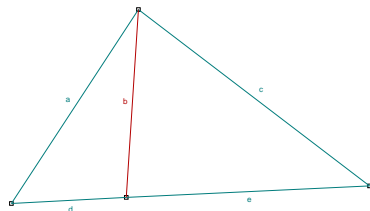
$$\Rightarrow \frac{cd}{2} = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2}$$

Her har vi et uttrykk for arealet til firkanten på venstre side. Utrykket på høyre side må derfor også gi arealet av firkanten, og dette stemmer da vi har en variant av Herons formel med avstandene mellom punktene i uttrykket. \diamond

Lar vi tre punkter ligge på samme linje fremkommer Stewarts setning.

Bevis. Stewarts teorem.

Vi lar tre av de fire punktene ligge på samme linje, mens det fjerde ligger fritt.



Dette gir seg uttrykk i at summen av avstandene fra et punkt til to andre, er lik avstanden mellom disse punktene. Vi setter inn og regner ut.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & d^2 & e^2 \\ 1 & b^2 & d^2 & 0 & (d+e)^2 \\ 1 & c^2 & e^2 & (d+e)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.11)$$

$$(a^2e - b^2f + c^2d - def)^2 = 0 \quad (f = d + e) \quad (4.12)$$

Dette er Stewarts teorem kvadrert. \diamond

Vi har med dette vist de ulike punkttheoremene vi har benyttet, og vil nå vende tilbake til sammenhenger mellom sirkler, og se hvordan det vi har utviklet kan anvendes her.

4.3 Utledning av Descartes teorem

Slik som vi fant en variant av Descartes teorem fra Stewarts teorem skal vi se at vi kan utlede det generelle Descartes teorem av det generelle punktavstand teoremet.

Bevis. Descartes teorem.

Gitt fire sirkler $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4$ som gjensidig tangerer hverandre. Vi anvender fire-punktdeterminanten, og de fire punktene er gitt ved sentrene til de fire sirklene. Avstandene mellom punktene er da gitt ved summen av radiene til sirklene, og vi kan sette dette inn i determinanten.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (r_1 + r_2)^2 & (r_1 + r_3)^2 & (r_1 + r_4)^2 \\ 1 & (r_1 + r_2)^2 & 0 & (r_2 + r_3)^2 & (r_2 + r_4)^2 \\ 1 & (r_1 + r_3)^2 & (r_2 + r_3)^2 & 0 & (r_3 + r_4)^2 \\ 1 & (r_1 + r_4)^2 & (r_2 + r_4)^2 & (r_3 + r_4)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Utregnet gir dette

$$\begin{aligned} & r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2 - 2r_1^2 r_2^2 r_3 r_4 - 2r_1^2 r_2 r_3^2 r_4 \\ & - 2r_1^2 r_2 r_3 r_4^2 - 2r_1 r_2^2 r_3^2 r_4 - 2r_1 r_2^2 r_3 r_4^2 - 2r_1 r_2 r_3^2 r_4^2 = 0 \end{aligned}$$

Vi dividerer uttrykket på $r_1^2 r_2^2 r_3^2 r_4^2$ og vi får

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 - 2r_1 r_2 - 2r_1 r_3 - 2r_1 r_4 - 2r_2 r_3 - 2r_2 r_4 - 2r_3 r_4 = 0$$

som også kan skrives

$$\Rightarrow (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2 = 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \quad (4.13)$$

Dermed er Descartes teorem fremkommet. \diamond

Det eiendommelige her er at forholdet mellom iradiene til sirklene blir langt enklere enn forholdet mellom linjestykkene. Det viser seg da også at vi kan omdanne selve punktdeterminanten slik at den blir til en relasjon mellom fire sirkler.

Kapittel 5

Cayleydeterminanten

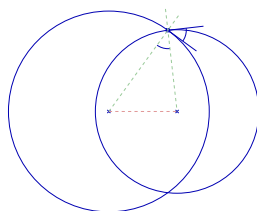
I de fleste sirkelsammenhengene vi har vært inne på er har tangering vært den vesentlige relasjonen mellom to sirkler. Imidlertid har vi også sett at ortogonalitet mellom sirkler spiller en betydelig rolle, og dette kommer blant annet til uttrykk i flere av Descartesteoremene. Vi skal nå se på en generell struktur der vi har å gjøre med vilkårlige relasjoner mellom sirkler å gjøre. Dette er en sammenheng som ble utviklet av Artur Cayley som en demonstrasjon på determinantregning og er gjengitt av G. Salmon [6]. Relasjonen mellom to sirklene vil være cosinus til vinkelen mellom dem som kan utvides til å gjelde sirkler som ikke skjærer hverandre. Vi vil kalle denne sentrale størrelsen for *vinkelavstanden* mellom to sirkler.

5.1 Vinkelavstand

Vi skal etterhvert se at vinkelavstand kan tilordnes både sirkler, linjer og punkter. Vi definerer først vinkelavstand mellom to sirkler.

Definisjon 5.1 *Vinkelavstand*

Gitt to sirkler r_1 og r_2 med avstand a mellom sentrene.



Da er vinkelavstanden eller kort v -avstanden mellom sirklene gitt ved

$$v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - a^2}{2r_1 r_2} \quad (5.1)$$

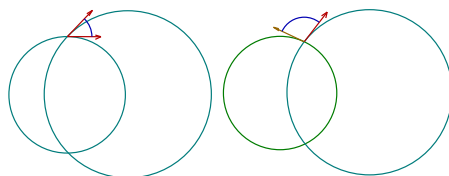
Vinkelen mellom sirklene \mathbf{r}_1 og \mathbf{r}_2 definerer vi ved

$$\theta = \arccos(v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)) \quad (5.2)$$

Denne størrelsen vil være imaginær når sirklene ikke skjærer hverandre.

Denne størrelsen refereres ofte til som "inversiv avstand". [?], som er definert som $\cosh^{-1} \left| \frac{r_1^2 + r_2^2 - a^2}{2r_1 r_2} \right|$. Dette er et vinkelbegrep og bevarer linearitet i uttrykkene. I denne fremstillingen har vi imidlertid fokus på de algebraiske forhold, og da har vi alltid å gjøre med cosinus til vinkelen. ¹

Vi har sett tidligere at sirkelens radius skifter fortegn når sirkelen blir til en linje, og etterhvert krummer seg motsatt av det den gjorde. Radien til en sirkel med samme geometriske uttrykk kan dermed være enten positiv eller negativ, mens tallverdien er den samme. Egentlig har vi da å gjøre med to ulike sirkler, men de vil geometrisk ligge på samme sted. En måte å uttrykke denne forskjellen på er å gi sirklene orientering.



De kan dreie med klokken eller mot denne. Hvis de dreier i samme retning har radien samme fortegn, dreier de motsatt har de motsatt retning. I en geometrisk struktur er ikke dette absolutte men relative størrelser. V -avstanden

¹En annen måte å uttrykke en avstand mellom to sirkler er ved *sirkelpotensen* mellom dem.[11] Dette er en utvidelse av begrepet et punkts potens i forhold til en sirkel. Definisjonen her er kvadratet av avstanden mellom sentrene til to sirkler, minus kvadratene av deres radier. Dette er det samme som telleren i vår definisjon, og mange relasjoner kan knyttes til disse størrelsene. I forhold til de problemstillingene vi ser på er v -avstanden et mer naturlig begrep, og vi vil anvende dette. Størrelsene er imidlertid enkelt overførbare i hverandre ved determinantoperasjonene.

mellom to sirkler med samme orientering er den samme enten orienteringen er i den ene eller den andre retningen. Dette ser vi av uttrykket for v-avstand der alle deluttrykk er kvadratiske. Har de derimot motsatt orientering endrer v-avstanden seg. Når sirklene skjærer hverandre er de også uttrykk for ulike vinkler, nemlig vinkelen som dannes mellom de to orienteringene ut fra skjæringspunktene til sirklene.

5.2 Cayley-determinanten

Ved at vi har definert v-avstand kan vi finne en den generelle sammenhengen mellom fire sirkler og vilkårlige v-avstander.

Setning 23 Cayley-determinanten. *Gitt fire sirkler $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4$ der vi setter v-avstanden mellom \mathbf{r}_i og \mathbf{r}_j som $v_{i,j}$. De inverse radiene er gitt ved $r_1 - r_4$. Vi har da følgende relasjon.*

$$\begin{vmatrix} 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_1 & 1 & v_{2,1} & v_{3,1} & v_{4,1} \\ r_2 & v_{1,2} & 1 & v_{3,2} & v_{4,2} \\ r_3 & v_{1,3} & v_{2,3} & 1 & v_{4,3} \\ r_4 & v_{1,4} & v_{2,4} & v_{3,4} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

Bevis. Vi uttrykker her de ordinære radiene med $r_1 - r_4$. Sentrene til disse sirklene danner en firepunktsammenheng, og vi kan sette avstandene $d(r_i, r_j)$ mellom sentrene inn i punktdeterminanten.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d(r_1, r_2)^2 & d(r_1, r_2)^2 & d(r_1, r_2)^2 \\ 1 & d(r_1, r_2)^2 & 0 & d(r_1, r_2)^2 & d(r_1, r_2)^2 \\ 1 & d(r_1, r_2)^2 & d(r_1, r_2)^2 & 0 & d(r_1, r_2)^2 \\ 1 & d(r_1, r_2)^2 & d(r_1, r_2)^2 & d(r_1, r_2)^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Avstandene mellom sirklene kan vi nå uttrykke ved sirkelens radier og ved v-avstanden mellom dem $d(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j v_{i,j}$. Vi setter disse uttrykkene inn i determinanten.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 v_{1,2} & r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 v_{1,3} & \dots \\ 1 & r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 v_{1,2} & 0 & r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 v_{1,2} & \dots \\ 1 & r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_3 v_{1,3} & r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 v_{1,2} & 0 & \dots \\ 1 & r_1^2 + r_4^2 - 2r_1 r_4 v_{1,4} & r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 v_{1,2} & r_1^2 + r_4^2 - 2r_3 r_4 v_{3,4} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dette uttrykket kan vi redusere. På en samme måte som når vi etablerte punktdeterminanten multipliserer vi nå første kolonne med r_1^2 , og trekker så kolonne 1 fra kolonne 2. Dette gjentar vi så for alle de andre kolonnene med de radier som finnes der. Det samme gjør vi for de fire radene. Vi kommer da frem til determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2r_1^2 & -2r_1r_2v_{1,2} & -2r_1r_2v_{1,3} & -2r_1r_2v_{1,3} \\ 1 & -2r_1r_2v_{1,2} & -2r_2^2 & 2r_1r_2v_{1,2} & -2r_1r_2v_{1,3} \\ 1 & -2r_1r_3v_{1,3} & -2r_1r_2v_{1,2} & -2r_3^2 & -2r_1r_2v_{1,3} \\ 1 & -2r_1r_4v_{1,4} & -2r_1r_2v_{1,2} & -2r_3r_4v_{3,4} & -2r_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

Vi dividerer så kolonne 2 på $-2r_1$ kolonne 3 på $-2r_2$ o.s.v, og multipliserer etterpå rad 1 med -2. Deretter dividerer vi rad 2 med r_1 rad 3 med r_2 og så videre. Vi kommer da frem formen

$$\begin{vmatrix} 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_1 & 1 & v_{1,2} & v_{1,3} & v_{1,3} \\ r_2 & v_{1,2} & 1 & v_{1,2} & v_{1,3} \\ r_3 & v_{1,3} & v_{1,2} & 1 & v_{1,3} \\ r_4 & v_{1,4} & v_{1,2} & v_{3,4} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

og vi har vist sammenhengen. ◇

Dermed har vi kommet frem til en form som gjelder for fire sirkler og vilkårlig v-avstanden mellom disse. Ved at vi har delt gjennom rader og kolonner med radiene har den inverse radien blitt den sentrale størrelsen i tillegg til v-avstander.

Vi kaller determinanten for *Cayly-determinanten* til fire sirkler. For hele sirkelsammenhengen med dens sirkler, forbindelser og overordnede struktur vil vi i analogi med biologi bruke begrepet type om en generell sammenheng. Når vi refererer til denne bestemte sammenhengen vil vi da bruke begrepet *Cayly-typen* eller kort *C-typen*. C-typen vil da bestå av fire sirkler, v-avstandene mellom disse og en determinant som gir en forbindelse mellom v-avstandene. ²

Regner vi ut denne C-determinanten eksplisitt fremkommer et helt uoversiktlig uttrykk. Dette vil forenkles når vi får spesielle forhold mellom sirk-

²Cayleydeterminanten kan uten videre utvides til høyere dimensjoner. I rommet vil vi ha å gjøre med 5 kuler og tilsvarende for høyere dimensjoner.

lene. Vi kan ved dermed vise flere av teoremene vi har vært innom, og også se på spesielle teoremer der noen v -avstander er vilkårlige.

5.3 Anvendelse av determinanten

Vi begynner med strukturer der tangering og ortogonalitet inngår, og bestemmer derfor først v -avstanden for disse tilfellene.

Lemma 5.1 *To sirkler r_1 og r_2 som er ortogonale til hverandre har v -avstand lik 0.*

Bevis. Når to sirkler er ortogonale til hverandre er vinkelen 90 grader, og cosinus blir 0. Ved 90° her vi også at $a^2 = r_1^2 + r_2^2$ slik at

$$v(r_1, r_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - a^2}{2r_1r_2} = 0$$

◇

Lemma 5.2 *Ved tangering er v -avstanden pluss eller minus 1.*

Bevis. Ved utvendig tangering av to positive sirkler har vi $a = r_1 + r_2$ som gir

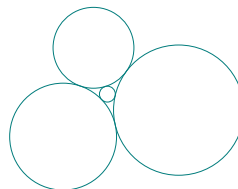
$$v(r_1, r_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - (r_1 + r_2)^2}{2r_1r_2} = \frac{-2r_1r_2}{2r_1r_2} = -1$$

Ved omsluttende tangering har vi $a = r_2 - r_1$ som gir $v = 1$. Når en av sirklene er negativ skifter fortegnene. ◇

Disse elementære v -avstandene er det som gjør at uttrykkene blir forholdsvis enkle når vi har med tangering og ortogonalitet å gjøre. Vi ser først hvordan Descartes teorem fremkommer ut fra C-typen.

Bevis. Descartes teorem

Her er gitt fire sirkler **a**, **b**, **c** og **d** som alle tangerer hverandre utvendig.



V-avstanden mellom dem blir da -1, og vi setter dette inn i C-determinanten.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & -1 & -1 & -1 \\ b & -1 & 1 & -1 & -1 \\ c & -1 & -1 & 1 & -1 \\ d & -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Regner vi ut denne determinanten får vi.

$$(a + b + c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \quad (5.4)$$

og vi har vist setningen. \diamond

Vi får altså Descartes teorem ganske direkte av Cayley-determinanten. Metoden er altså å finne determinanten som svarer til den geometriske sammenhengen, og ved å regne ut denne får vi et algebraisk uttrykk for situasjonen.

³

Det neste vi ser på er en sammenheng der de fire sirklene danner samme v-avstand til hverandre. Vi får da et mer generelt algebraisk uttrykk enn Descartes teorem, og vi vil se flere konsekvenser av dette.

Setning 24 Utvidet Descartes teorem

Gitt fire sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} og \mathbf{d} , som alle danner samme vinkel til hverandre. Da er relasjonen mellom iradiene til disse og v-avstanden gitt ved

$$v(a + b + c + d)^2 = (3v + 1)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \quad (5.5)$$

Bevis. Vi har gitt iradiene, og alle v-avstandene mellom sirklene er den samme, og vi setter inn i C-determinanten.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & v & v & v \\ b & v & 1 & v & v \\ c & v & v & 1 & v \\ d & v & v & v & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.6)$$

³Vi går ikke her i detalj inn på hvordan determinanten regnes ut i de ulike tilfellene. Mange kan relativt enkelt regnes ut for hånd ved reglene for determinanter. Raskere går det imidlertid å bruke et matematikkprogram. I disse undersøkelsene er Mathematica anvendt.

Vi regner ut og får

$$(1-v)^2(a^2+b^2+c^2+d^2+2a^2v+2b^2v+2c^2v+2d^2v-2abv-2acv-2adv-2bcv-2bdv-2cdv) = 0$$

Her er faktoren $(v-1)^2$ uttrykk for den trivielle situasjonen når alle sirklene faller sammen, og v -avstanden blir 1. Den andre faktoren lar seg omdanne til det søkte uttrykket.

Utrykket blir relativt enkelt og ligner på Descartes teorem. Det som skiller er faktoren v foran kvadratet av summen av iradiene, og faktoren $(3v+1)$ foran summen av kvadratene. Vi finner umiddelbart flere konsekvenser av teoremet.

Først kan vi legge merke til at når v -avstanden er -1 får vi Descartes teorem.

Corrolar 5.1 Når fire sirkler er ortogonale til hverandre er summen av kvadratene til iradiene til disse lik 0

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \tag{5.7}$$

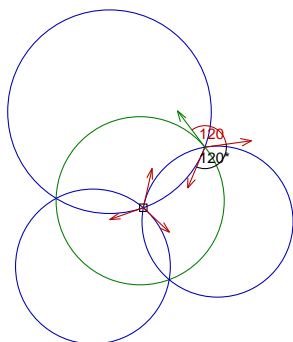
Bevis. Ved ortogonalitet er v -avstanden lik 0, og vi får uttrykket over direkte fra Descartes utvidete teorem. \diamond

Vi får altså at summen av fire kvadrater skal være 0. Dette går ikke med bare reelle sirkler. Det stemmer også med den geometriske situasjonen. Hvis tre sirkler er gjensidig ortogonale til hverandre vil det ikke finnes en fjerde med reell radius som også er ortogonal til disse. Når imidlertid muligheten av imaginær radius tas med er resultatet mulig. Relasjonen mellom fire sirkler som på denne måten er ortogonale til hverandre vil som vi senere skal se spille en stor rolle ved etableringen av et bestemt koordinatsystem for sirkler.

En annen spesialisering av ligningen over har vi når vinkelen mellom sirklene blir 120° .

Corrolar 5.2 Gitt fire sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} og \mathbf{d} som gjensidig danner 120° vinkler

med hverandre.



Da summen av alle produktene av iradiene dem imellom lik 0.

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$$

Bevis. V-avstanden blir $\cos 120^\circ = \frac{-1}{2}$ og vi setter dette inn i formelen over.

24

$$\left(3\frac{-1}{2} + 1\right)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \frac{-1}{2}(a + b + c + d)^2 \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0 \quad (5.9)$$

og forholdet er vist. ◇

Et interessant moment ved denne formen er at den er helt symmetrisk med hensyn på den ordinære og den inverse radius. Deler vi nemlig alle ledd i uttrykket på $abcd$ oppstår de ordinære radiene. Dermed blir uttrykket helt likt med hensyn på disse radiene.

$$áb + ác + ád + bc + bd + cd = 0 \quad (5.10)$$

Dette betyr videre at vi kan spesialisere uttrykket på to ulike måter. Vi kan på den ene siden gjøre prosessen med å la en av sirklene bli til linje, og uttrykket som inneholder de inverse radier forenkles til et uttrykk med ordinære radier.

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$$

$$d \rightarrow 0$$

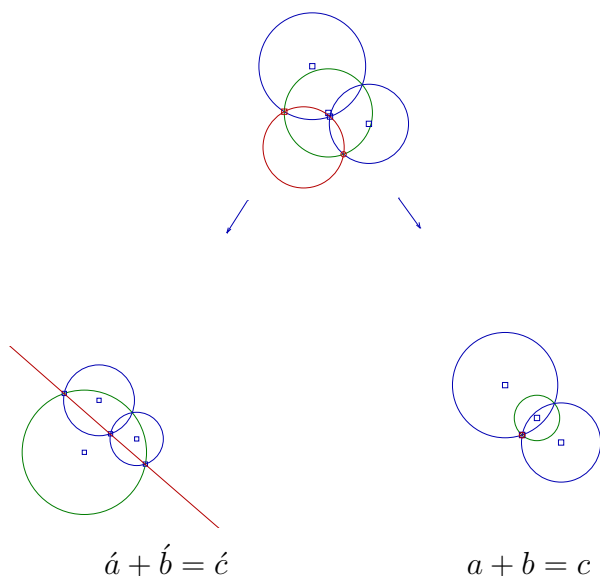
$$\Rightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c = 0$$

På den andre siden kan vi la en sirkel bli til et punkt, og da reduseres uttrykket som inneholder den ordinære radien til et uttrykk med de inverse radiene.

$$\begin{aligned} \acute{a}\acute{b} + \acute{a}\acute{c} + \acute{a}\acute{d} + \acute{b}\acute{c} + \acute{b}\acute{d} + \acute{c}\acute{d} &= 0 \\ \acute{d} &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow \acute{a}\acute{b} + \acute{a}\acute{c} + \acute{b}\acute{c} &= 0 \\ \Rightarrow a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

Vi kan sette opp en oversikt over spesialiseringene.



Denne dualiteten finner vi ikke for andre vinkler enn 120^0 .

En annen egenskap ved sirkler som danner vinkler på 120^0 er at de møtes tre og tre i fire punkter. For å se dette kan vi anvende en annen spesialisering av C-typen. Vi lar her tre av sirklene ha samme v-avstand til hverandre, mens den fjerde sirkelen er ortogonal til disse tre.

Setning 25 *Gitt tre sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} \mathbf{c} med sammen innbyrdes v-avstanden v , og ortogonalt til sirklene \mathbf{r} . Da vil iradien r til denne sirkelen være gitt ved*

$$\Rightarrow r^2 = \frac{2v(a + b + c)^2 - (2 + v)(a^2 + b^2 + c^2)}{(v - 1)(2v + 1)} \quad (5.11)$$

Bevis: Vi finner en relasjon mellom størrelsene ved å sette inn determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & r \\ a & 1 & v & v & 0 \\ b & v & 1 & v & 0 \\ c & v & v & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.12)$$

Utregnet med hensyn på r får vi forholdet over. ◇

Uttrykket her er noe mer komplekst enn det helt symmetriske, men likevel slik at vi har oversikt.

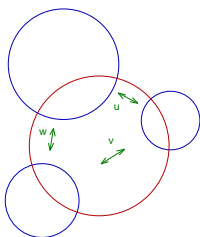
Når v er 0 får vi sammenhengen med fire ortogonale sirkler, og når v er lik -1 oppstår konfigurasjonen med en sirkel ortogonal til tre tangerende. Når v går mot $-1/2$ ser vi at r går mot ∞ . Det betyr at den ordinære radien vil gå mot null, og de tre sirklene møtes i samme punkt. Dette betyr at tre sirkler som danner vinkler på 120° med hverandre møtes i et felles punkt.

5.4 Appolonius problem

Vi kan ved C-typen også finne uttrykk for tangerende og ortogonale sirkler når de tre utgangssirklene har vilkårlig v -avstand. Her blir imidlertid uttrykkene store, men ved å uttrykke sammenhengene ved determinanter får vi eksplisitte løsninger.

Vi ser først på ortogonalsirkelen til tre vilkårlige sirkler.

Setning 26 *Gitt tre sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} med v -avstander u , v og w , og ortogonalsirkelen \mathbf{r} til disse.*



Da er iradien r til \mathbf{r} gitt ved

$$r^2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & u & v \\ b & u & 1 & w \\ c & v & w & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u & v \\ u & 1 & w \\ v & w & 1 \end{vmatrix}} \quad (5.13)$$

Bevis: Vi setter størrelsene inn i determinanten og regner ut

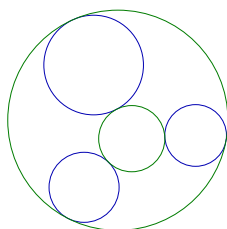
$$\begin{vmatrix} 0 & r & a & b & c \\ r & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & u & v \\ b & 0 & u & 1 & w \\ c & 0 & v & w & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ved enkle determinantoperasjoner får vi det eksplisitt uttrykket for r over. \diamond

Determinantene i teller og nevner er reduksjoner av den opprinnelig determinanten.

Vi går så over til Appolonius radius teorem.

Setning 27 Gitt tre sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} med v -avstander u , v og w , og en sirkel \mathbf{r} som tangerer de tre sirklene.



Da er iradiene til de to appoloniussirklene som tangerer disse gitt ved

$$r = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & u & v \\ b & u & 1 & w \\ c & v & w & 1 \end{vmatrix} \pm \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & u & v \\ b & u & 1 & w \\ c & v & w & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & u & v \\ 1 & u & 1 & w \\ 1 & v & w & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u & v \\ u & 1 & w \\ v & w & 1 \end{vmatrix}} \quad (5.14)$$

Bevis: Her har vi gitt fire sirkler og v-avstandene mellom dem. Vi setter verdinene inn i determinanten.

$$\begin{vmatrix} 0 & r & a & b & c \\ r & 1 & -1 & -1 & -1 \\ a & -1 & 1 & u & v \\ b & -1 & u & 1 & w \\ c & -1 & v & w & 1 \end{vmatrix} = 0$$

som gir en annengradsligning med hensyn på r

$$r^2 \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ u & 1 & w \\ v & w & 1 \end{vmatrix} + 2r \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ a & 1 & u & v \\ b & u & 1 & w \\ c & v & w & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ a & -1 & 1 & u & v \\ b & -1 & u & 1 & w \\ c & -1 & v & w & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.15)$$

Utrykker vi dette ved r og omdanner oppstår uttrykket over. \diamond

Dermed har vi funnet et eksplisitt uttrykk for radius til Appoloniussirklene når vi har gitt tre sirkler og deres innbyrdes v-avstand. Utrykkene gir et par appoloniussirkler, og ved å skifte fortegn til utgangssirklene får vi de seks andre sirklene.

Dermed er mange av sirkelsammenhengene fra kapittel 2 begrunnet, og vi har også funnet en løsning av det appolonske radiusproblem. Den generelle løsningen av dette innebærer imidlertid at vi også ser på situasjoner med linjer og punkter. I det følgende skal vi se hvordan overgangen til linjer og punkter kan betraktes generelt slik at vi kan behandle alle situasjoner som innbefatter sirkler, linjer og punkter.

5.5 Oppgaver

Oppgave 5.1 *Vi har gitt to ortogonale sirkler s_1 og s_2 og to andre sirkler s_3 og s_4 som tangerer disse, og er ortogonale til hverandre. Finn relasjonen mellom radiene til sirklene.*⁴

Oppgave 5.2 *Vi har tre sirkler med invers radius a, b og c som er ortogonale til hverandre, og en fjerde sirkel med invers radius r som tangerer disse tre. Vis at relasjonen mellom de fire radiene kan uttrykkes som $(a + b + c - r)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$*

⁴ $(a + b + c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2ab + 2cd$

Kapittel 6

Sirkel, linje og punktstrukturer

Vinkelavstand er et tall tilordnet to sirkler. Nå kan jo sirkler bli til punkter og linjer. Vi har sett flere eksempler på at sirkler går over til linjer i ulike strukturer. Her har det imidlertid vært tale om spesielle strukturer knyttet til tangering og ortogonalitet. Vi skal nå se hva som skjer med v -avstanden når en eller begge sirklene blir til linjer. Vi vil videre se på punktdannelsen som er en mer radikal endring av sirkelen i denne sammenheng. At sirkelen kan gå over til punkt har vi bare observert i konfigurasjonen med sirkler som danner 120° til hverandre [5.10](#). Nå vil vi etterhvert se på en mer systematisk behandling av dette. Vi ser først nærmere på linjedannelsen.

6.1 Linjedannelse

Når sirkler blir til linjer blir iradien lik 0, og strukturene forenkles. Anvender vi C-typen kan også en eller flere sirkler bli til linjer. For linjer setter vi da 0 i stedet for iradien. Det andre som må betenkes er hvordan det blir med v -avstanden i dette tilfellet. Ved skjæring mellom elementer blir jo v -avstanden lik cosinus til vinkelen mellom dem. V -avstanden mellom to linjer blir dermed ganske enkelt cosinus til vinkelen mellom dem. Hva som blir den generelle v -avstanden mellom en linje og en sirkel finner vi ved en grenseprosess der en av sirklene går over til en linje.

Setning 28 *Gitt en sirkel r og en linje l der avstanden mellom senter til sirkel og linjen er a . Da er v -avstanden mellom sirkel og linje gitt ved*

$$v_{(r,l)} = a r \tag{6.1}$$

Bevis. Vi begynner med to sirkler \mathbf{r} og \mathbf{s} . Avstanden fra senteret til \mathbf{r} til nærmeste periferi til \mathbf{s} er gitt ved a . V-avstanden kan da uttrykkes

$$d = \frac{(a + \acute{s})^2 - \acute{s}^2 - r^2}{2\acute{r}\acute{s}} = \frac{a^2 + 2a\acute{s} - \acute{r}^2}{2\acute{r}\acute{s}} = \frac{a^2}{2\acute{r}\acute{s}} + \frac{a}{\acute{r}} - \frac{\acute{r}}{2\acute{s}}$$

Vi lar nå senteret til s gå mot uendelig mens a er en gitt størrelse. Da får vi

$$v_{(r,l)} = \lim_{\acute{s} \rightarrow \infty} v_{(r,s)} = \lim_{\acute{s} \rightarrow \infty} \left(\frac{a^2}{2\acute{r}\acute{s}} + \frac{a}{\acute{r}} - \frac{\acute{r}}{2\acute{s}} \right) = \frac{a}{\acute{r}} = a r$$

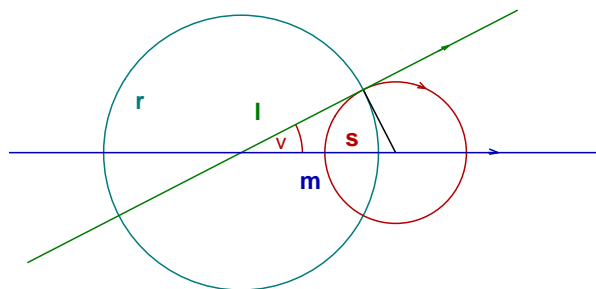
◇

Dermed er et uttrykk for v-avstanden mellom en sirkel og en linje fremkommet. Her er å bemerke at v-avstanden får negativt fortegn når et av elementene skifter retning. Dette fremkommer av uttrykket når radien til sirkelen får motsatt retning. Linjen kan imidlertid også ha motsatt retning, og dette vil vi se hvis vi tar utgangspunkt i en sirkel med motsatt orientering. Dette innebærer også at hvis en sirkel med en gitt orientering har positiv v-avstand til en linje, så vil v-avstanden være negativ når sirkelen ligger på den andre siden av linjen.

V-avstanden mellom to linjer ser vi intuitivt blir cosinus til vinkelen mellom dem. Vi kan imidlertid også begrunne dette ut fra definisjonen til v-avstanden og anvende C-typen. Også her må vi ta hensyn til orienteringen til linjene, v-avstanden gjelder vinkelen mellom to gitte retninger.

Setning 29 *Vinkelavstanden mellom to linjer er cosinus til vinkelen mellom dem.*

Bevis. De fire elementene i sammenhengen er her to linjer og to sirkler. De to linjene \mathbf{l} og \mathbf{m} danner v-avstanden $v_{l,m}$ som vi kort skriver v. Sirkelen \mathbf{r} har senter der linjene skjærer hverandre, og sirkelen \mathbf{s} er ortogonal til \mathbf{m} og til \mathbf{r} og tangerer \mathbf{l} der denne skjærer \mathbf{r} .



Sirkelen \mathbf{r} er ortogonal til de tre andre elementene, og v-avstandene blir dermed 0 til disse. Sirkelen \mathbf{s} er ortogonal til \mathbf{m} , men tangerer \mathbf{l} slik at v-avstandene her blir henholdsvis 0 og 1. Vi setter inn i determinanten og regner ut.

$$\begin{vmatrix} 0 & r & s & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 & v & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dette gir

$$v^2 r^2 + d^2 s^2 - s^2 = 0$$

Utregnet med hensyn på v får vi

$$v = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} = \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + s'^2}}$$

Dette er hosliggende katet delt på hypotenus, og er dermed uttrykk for cosinus til vinklen. Vi har dermed at v-avstanden mellom to linjer er cosinus til vinkelen mellom dem. \diamond

Vi kunne ønske å finne radius til en sirkel innskrevet i en trekant ved C-typen. Her er jo fire elementer, tre linjer og en sirkel som tangerer disse tre. V-avstandene mellom linjene og sirkel lik 1, og hvis vi i tillegg har gitt v-avstandene mellom linjene (u, v, w) har vi bare radien til sirkelen som ukjent. Setter vi dette inn i C-determinanten får vi

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & u & v & 1 \\ 0 & u & 1 & w & 1 \\ 0 & v & w & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Utregnet gir dette

$$r^2(1 - u^2 - v^2 - w^2 + 2uvw) = 0$$

Her ser vi at radien ikke kan bestemmes fra vinklene mellom linjene, og det er som vi kan forvente fordi likeformede trekanter gir samme vinkler. Relasjonen i parentes er en relasjon mellom cosinus til tre vinkler der vinkelsummen er 2π .

Vi ser nå på punktdannelsen, og vil da etterhvert se at en sirkel kan bestemmes av tre punkter og v-avstandene mellom disse.

6.2 Punktdannelse

Punktdannelsen skjer ikke så liketil som linjedannelsen. I uttrykkene for v-avstand har vi radiene til sirkelen i nevneren slik at den vil gå mot uendelig når sirkelen går mot et punkt. Vi kan dermed ikke direkte danne v-avstander knyttet til punkter slik vi gjorde for linjer. Dette problemet lar seg imidlertid løse i de konkrete sammenhenger. Vi har sett av vi kan multiplisere og dividere rader og kolonner med en konstant uten at determinanten endres. Hvis vi vil at en sirkel skal bli til et punkt, da multipliserer vi med den ordinære radien til denne sirkelen i den rad og kolonne der sirkelen inngår. Når dette er gjort kan vi la radien gå mot null, og vi får strukturer som gjelder for punkter. Det viser seg da at vi kan definere v-avstander i strukturer der punkter inngår. Vi skal se detaljert på denne prosessen.

Utvikling 6.1 *Vi har gitt C-typen.*

$$\begin{vmatrix} 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_1 & 1 & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ r_2 & v_{12} & 1 & v_{23} & v_{24} \\ r_3 & v_{13} & v_{23} & 1 & v_{34} \\ r_4 & v_{14} & v_{24} & v_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.2)$$

For sirkelen r_1 setter vi opp eksplisitte uttrykk for v-avstandene.

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{r_1} & r_2 & r_3 & r_4 \\ \frac{1}{r_1} & 1 & \frac{r_1^2+r_2^2-a_2^2}{2r_1r_2} & \frac{r_1^2+r_3^2-a_3^2}{2r_1r_3} & \frac{r_1^2+r_4^2-a_4^2}{2r_1r_4} \\ r_2 & \frac{r_1^2+r_2^2-a_2^2}{2r_1r_2} & 1 & v_{23} & v_{24} \\ r_3 & \frac{r_1^2+r_3^2-a_3^2}{2r_1r_3} & v_{23} & 1 & v_{34} \\ r_4 & \frac{r_1^2+r_4^2-a_4^2}{2r_1r_4} & v_{24} & v_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.3)$$

Vi vil at sirkelen r_1 skal bli til et punkt. Vi multipliserer med r_1 i andre rad og andre kolonne og får:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 1 & r_1^2 & \frac{r_1^2+r_2^2-a_2^2}{2r_2} & \frac{r_1^2+r_3^2-a_3^2}{2r_3} & \frac{r_1^2+r_4^2-a_4^2}{2r_4} \\ r_2 & \frac{r_1^2+r_2^2-a_2^2}{2r_2} & 1 & v_{23} & v_{24} \\ r_3 & \frac{r_1^2+r_3^2-a_3^2}{2r_3} & v_{23} & 1 & v_{34} \\ r_4 & \frac{r_1^2+r_4^2-a_4^2}{2r_4} & v_{24} & v_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.4)$$

Nå lar vi r_1 gå mot 0, og kan da uten videre sette $r_1 = 0$ siden den bare forekommer i tellerene.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 1 & 0 & \frac{r_2^2 - a_2^2}{2r_2} & \frac{r_3^2 - a_3^2}{2r_3} & \frac{r_4^2 - a_4^2}{2r_4} \\ r_2 & \frac{r_2^2 - a_2^2}{2r_2} & 1 & v_{23} & v_{24} \\ r_3 & \frac{r_3^2 - a_3^2}{2r_3} & v_{23} & 1 & v_{34} \\ r_4 & \frac{r_4^2 - a_4^2}{2r_4} & v_{24} & v_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.5)$$

Denne determinant som gjelder for tre sirkler og et punkt. Flere aspekter har endret seg. I stedet for krumning har vi verdien 1 i kolonnen og raden der punktet forekommer. Der raden og kolonnen krysser hverandre har vi verdien 0 istedet for 1. Ti slutt har vi en radikal endring av vinkelavstanden. Vi skriver denne opp spesifikt.

Definisjon 6.1 Vi definerer v -avstanden mellom et punkt P og en sirkel r der a er avstanden mellom punktet og senteret til sirkelen ved

$$v_{(P,r)} = \frac{r^2 - a^2}{2r} \quad (6.6)$$

Dette uttrykket er det samme som potensen fra et punkt med hensyn på en sirkel delt på diameteren til sirkelen, og vi kaller det potensforholdet fra et punkt til en sirkel. Dette skiller seg også fra den ordinære v -avstanden ved at det har metrisk dimensjon 1 til forskjell fra vinkelavstand som er en skalar.

Vi skal gå videre med uttrykket over og la enda en sirkel bli til punkt. Vi vil da ikke bare ha relasjon fra punkt til sirkel, men det vil da også fremkomme en relasjon mellom to punkter.

Utvikling 6.2 Vi multipliserer en ny rad og en ny kolonne med radien q_2 til sirkelen s_2 med invers radius r_2 .

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & r_3 & r_4 \\ 1 & 0 & \frac{r_2^2 - a_{1,2}^2}{2r_2} & \frac{r_3^2 - a_{1,3}^2}{2r_3} & \frac{r_4^2 - a_{1,4}^2}{2r_4} \\ 1 & \frac{r_2^2 - a_{1,2}^2}{2r_2} & r_2 & \frac{r_2^2 + r_3^2 - a_{2,3}^2}{2r_3} & \frac{r_2^2 + r_4^2 - a_{2,4}^2}{2r_4} \\ r_3 & \frac{r_3^2 - a_{1,3}^2}{2r_3} & \frac{r_2^2 + r_3^2 - a_{2,3}^2}{2r_3} & 1 & v_{34} \\ r_4 & \frac{r_4^2 - a_{1,4}^2}{2r_4} & \frac{r_2^2 + r_4^2 - a_{2,4}^2}{2r_4} & v_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vi lar så q_2 også gå mot 0, og også her kan vi sette $q_2 = 0$ i uttrykkene.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & r_3 & r_4 \\ 1 & 0 & \frac{-a_{1,2}^2}{2} & \frac{r_3^2 - a_{1,3}^2}{2r_3} & \frac{r_4^2 - a_{1,4}^2}{2r_4} \\ 1 & \frac{-a_{1,2}^2}{2} & 0 & \frac{r_3^2 - a_{2,3}^2}{2r_3} & \frac{r_4^2 - a_{2,4}^2}{2r_4} \\ r_3 & \frac{r_3^2 - a_{1,3}^2}{2r_3} & \frac{r_3^2 - a_{2,3}^2}{2r_3} & 1 & v_{34} \\ r_4 & \frac{r_4^2 - a_{1,4}^2}{2r_4} & \frac{r_3^2 - a_{2,4}^2}{2r_3} & v_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.7)$$

Determinaten har på de fleste punkter endret seg slik som den forrige, men vi hari tillegg er et nytt uttrykk for v -avstanden mellom to punkter oppstått. Denne er da gitt ved

$$v_{(P_1, P_2)} = \frac{-a^2}{2} \quad (6.8)$$

Vi ser at avstandsbegrepet her skiller seg klart fra det alminnelige der vi ganske enkelt setter $v_{(P_1, P_2)} = a$. Vi legger også merke til at verdien i begynnelsen av raden og kolonnen der punktet gjør seg gjeldene er lik 1, mens verdien i diagonalen blir 0. Dette er helt polart til linjen som har 0 i begynnelsen av rad og kolonne, men 1 i diagonalen.

Relasjonene mellom punkter og sirkler er oppstått ved grenseprosesser. Dette skiller seg vesentlig fra tilfellet med overgang fra sirkel til linje. En annen type forhold er fremkommet ved å multiplikasjon med iradiene. Egentlig er derfor punktprosessen en rent operasjonell sak som er mulig fordi vi kan multiplisere rader og kolonner i determinanter med verdi 0. Vi vil imidlertid etterhvert se at de ulike v -avstandene kan betraktes under ett, men dette vil vi vente med til senere da visse generaliseringer av sammenhengene vil gjøre det klarere. 8.2 Vi kan etterhvert sette opp en oversikt over de ulike v -avstandenene som dannes.

6.3 De ulike vinkelavstander

Vi ser at vinkelavstanden endrer form alt etter hvilke elementer vi har ved å gjøre. Grunnstørrelsen var relasjonen mellom to sirkler som vi definerer på en bestemt måte. Ut fra denne har vi fått relasjonen mellom sirkel og linje, og mellom to linjer. Videre oppstår bestemte relasjoner mellom sirkel og punkt, og mellom to punkter ved punkt dannelse. Det eneste forhold vi ennå ikke har betraktet er vinkelavstanden mellom punkt og linje. Denne finner vi ved

grensebetraktning der vi begynner med punkt og sirkel, og lar sirkelen bli linje.

Setning 30 *V-avstanden fra et punkt til en linje er gitt ved normalavstanden fra punktet til linjen.*

Bevis. Vi tar utgangspunkt i potensforholdet mellom et punkt \mathbf{P} og en sirkel s , der avstanden fra punktet til periferien på sirkelen er a , og lar radien til sirkelen gå mot uendelig.

$$v_{P,s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(a+s)^2 - s^2}{2s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{a^2}{2s} + a \right) = a$$

◇

Vi ser dermed at v-avstanden mellom et punkt og en linje er normalavstanden fra punktet til linjen. Dette er også et vesentlig resultat, og koordiansystemet henger blant annet sammen med dette forhold.

Vi kan nå sette opp en oversikt over alle v-avstandene.

$$\begin{aligned} (\text{Sirkel}, \text{Sirkel}) \quad v_{(s,s)} &= \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} \\ (\text{Sirkel}, \text{Linje}) \quad v_{(s,l)} &= \frac{a}{r} \\ (\text{Sirkel}, \text{Punkt}) \quad v_{(s,P)} &= \frac{d^2 - r^2}{2r} \\ (\text{Linje}, \text{Punkt}) \quad v_{(l,P)} &= a \\ (\text{Linje}, \text{Linje}) \quad v_{(l,l)} &= \cos \theta_{(l_1, l_2)} \\ (\text{Punkt}, \text{Punkt}) \quad v_{(P,P)} &= \frac{-a^2}{2} \end{aligned} \tag{6.9}$$

V-avstanden endrer altså karakter alt etter hvilke elementer vi har som gjør seg gjeldene.

Vi skal nå se på konkrete sammenhenger der punkter inngår. Når alle sirklene blir til punkter oppstår Cayley-Menger determinaten og denne har vi allerede behandlet. Her skal vi se uttrykkene blir når sirkler, linjer og punkter opptrer sammen.

6.4 Ulike problemstillinger

Aller først vil vi se på en struktur med tre punkter og en sirkel. Den enkleste av disse strukturene har vi når de tre punktene ligger på sirkelen. Vi har ved dette en sirkel som omskriver en trekant. V-avstandene mellom punktene og sirkelen vil være 0. Dette innser vi når vi betrenker at potensen fra et punkt på sirkelen er null. De størrelsene som gjenstår er da v-avstandene mellom de tre punktene og den iradien til sirkelen. Disse størrelsene vil stå i relasjon til hverandre, og vi kan ved denne relasjonen finne et uttrykk for radien til sirkelen ut fra avstanden mellom punktene.

Setning 31 *Gitt en trekant med sider a, b og c , og en sirkel som går gjennom de tre punktene. Radien er da uttrykt ved*

$$r = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2abc} \quad (6.10)$$

eller ved

$$r = \frac{2F}{abc} \quad (6.11)$$

Bevis. Relasjonene mellom de tre punktene er $\frac{-a^2}{2}$, $\frac{-b^2}{2}$ og $\frac{-c^2}{2}$, og null mellom sirkler og punkt. Vi setter inn i determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & r & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & \frac{-a^2}{2} & \frac{-b^2}{2} \\ r & 0 & \frac{-a^2}{2} & 0 & \frac{-c^2}{2} \\ r & 0 & \frac{-b^2}{2} & \frac{-c^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.12)$$

utregnet gir dette

$$\begin{aligned} r^2 a^2 b^2 c^2 &= 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ r^2 a^2 b^2 c^2 &= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \\ r &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{abc} \end{aligned}$$

◇

Vi kunne forenklet uttrykket ved å sette inn arealet for kvadratrotuttrykket.¹

¹Et klassisk problem som gjelder forhold i rommet ble behandlet av Euler. Det gjelder her å finne radien til en kule som omskriver et tetraeder. For å løse dette problemet går

Vi kan også finne Herons formel mer direkte enn tidligere ved å se på en struktur med tre punkter og en linje. Her vil v -avstanden mellom et punkt og en linje gjøre seg gjeldende.

Bevis. Herons formel

Vi har gitt en linje l , og tre punkter **A**, **B** og **C** der **A** og **B** ligger på linjen. Høyden fra **C** til l er gitt ved h , og de motstående sidene til punktene ved a , b og c . Vi setter inn i C-typen

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & h \\ r & 0 & 0 & \frac{-a^2}{2} & \frac{-b^2}{2} \\ r & 0 & \frac{-a^2}{2} & 0 & \frac{-c^2}{2} \\ r & h & \frac{-b^2}{2} & \frac{-c^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

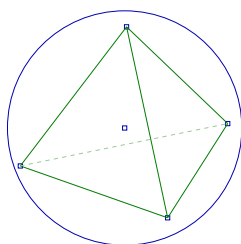
Utregnet gir dette

$$\frac{ch}{2} = \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

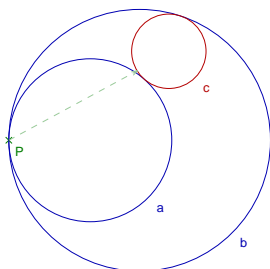
Her er venstresiden det ordinære flateuttrykket, og dermed er også høyre side et uttrykk for flaten, og uttrykket er Herons formel. \diamond

I relasjonene vi har behandlet så langt har punktene ligget på sirkler når de har vært med i strukturer. Dermed blir potensforholdet mellom punkt og sirkler lik 0. Utrykk som inneholder potensforholdet blir ofte komplekse. Vi skal imidlertid se at vi kan få frem et interessant forhold som inneholder potensforholdet mellom et punkt og en sirkel.

vi frem på nøyaktig samme måte som når vi finner radien til den omskrevne sirkelen, men nå bruker vi determinaten som gjelder fem elementer i rommet.



Setning 32 Gitt to sirkler \mathbf{a} og \mathbf{b} som tangerer hverandre i punktet \mathbf{P} . Vi legger en tredje sirkel \mathbf{c} som tangerer de to andre.



Da vil potensforholdet p fra \mathbf{P} til \mathbf{c} være konstant når \mathbf{c} beveger seg, og det er uttrykket ved

$$p = \frac{-2}{a + b} \quad (6.13)$$

Bevis. Vi setter inn de ulike radier og vinkelavstander i determinanten og regner ut.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 1 & -1 & -1 & 0 \\ b & -1 & 1 & -1 & 0 \\ c & -1 & -1 & 1 & p \\ 1 & 0 & 0 & p & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p^2 a^2 + p^2 b^2 + p^2 a b + 4p a + 4p b + 4 &= 0 \\ \Rightarrow (p a + p b + 2)^2 &= 0 \\ \Rightarrow p &= \frac{-2}{a + b} \end{aligned}$$

og vi har vist uttrykket. ◇

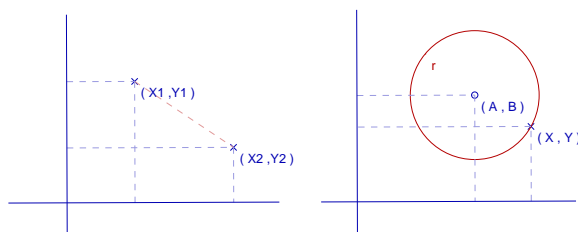
Etter samme mønster kan vi se på alle variantene av Appoloniusproblemet. Vi kan bruke det eksplisitte uttrykket for radius til appoloniussirklene. [5.14](#)

Vi skal nå betrakte noen forhold i det kartesiske koordinatsystemet ved C-typen.

6.5 Forhold i koordinatsystemet

Betenker vi at koordiantaksene er linjer, og at vi ut fra disse beskriver posisjonene til punkter følger det at vi kan beskrive forhold i koordinatsystemet ved C-typen. Vi viser et par eksempler på dette.

Her velger vi to av de fire elementene som koordinataksene. Sammenhengene vil allerede ved dette forenkles betraktelig fordi iradien til aksene er 0, og deres innbyrdes v-avstand er 0 fordi aksene er ortogonale til hverandre. De to andre elementene kan da betraktes som objekter i koordinatsystemet, og vi kan finne relasjoner mellom disse ut fra deres relasjon til koordinataksene.



Det enkleste eksempelet på dette er to punkter i koordinatsystemet. Et punkts koordinater blir da ganske enkelt v-avstandene fra punktet til aksene. I C-typen er alle størrelsene forbundet, og vi kan derfor utrykke v-avstanden mellom to punkter ved koordinatene.

Setning 33 *Gitt to punkter $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ i koordinatsystemet. Da er v-avstanden mellom punktene gitt ved*

$$a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Bevis. Vi har de to koordinataksene \mathbf{x} og \mathbf{y} , og to punkter \mathbf{P}_1 og \mathbf{P}_2 med v-avstand $v_{1,2}$. Vi setter inn i Cayly-determinanten og regner ut.

$$\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \\ \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 & 0 & v_{1,2} \\ 1 & x_2 & y_2 & v_{1,2} & 0 \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2v_{1,2} + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0$$

Setter vi $v_{1,2} = \frac{a^2}{-2}$ i ligningen får vi den ordinære sammenhengen. \diamond

På samme måte kan vi få et uttrykk for v-avstanden fra et punkt til en sirkel.

Setning 34 *Vi har gitt en sirkel s og et punkt P i koordiantssystemet. Da er v-avstanden mellom punktet og sirkelen gitt ved*

$$v_{Ps} = \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2}{-2r}$$

Bevis. Gitt de to koordinataksene x og y , et punkt $P = (x, y)$ og en sirkel s med ordinær radius r og senter (a, b) . V-avstanden mellom punktet og sirkelen er gitt ved v_{Ps} . Vi setter inn i Cayly-determinanten.

$$\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{s} \end{array} \begin{vmatrix} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{P} & \mathbf{s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{r} \\ 0 & 1 & 0 & x & \frac{a}{r} \\ 0 & 0 & 1 & y & \frac{b}{r} \\ 1 & x & y & 0 & v_{Ps} \\ \frac{1}{r} & \frac{a}{r} & \frac{b}{r} & v_{Ps} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vi regner ut og ordner, og får resultatet

$$v_{Ps} = \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2}{-2r}$$

som vi kan se stemmer med definisjonen av $v_{(P,s)}$. \diamond

Et spesialtilfelle av dette har vi når punktet ligger på sirkelen ved Når punktet ligger på sirkelen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ som er den ordinære sirkelligningen.

Med dette har vi begunnet flere teoremer som også innbefatter punkter og linjer. Likevel er det mange flere teoremer som ikke lar seg behandle av C-typen. I strukturen er det bare fire elementer, og mange geometriske bilder er langt rikere. Vi skal imidlertid se at vi kan gjøre noen utvidelser av C-typen som vil kunne omfatte langt flere sammenhenger.

Kapittel 7

Hart-typen

Vi skal utvikle en generalisering av C-typen med utgangspunkt i Hartsirkelteoremet. Vi vil da kunne få forståelse for en utvidet klasse sirkel teoremer.

7.1 Generalisering av C-typen

Vi utviklet Hart-teoremet fra teoremet for fire innskrevne sirkler. Derfra påviste vi at Descartes kunne oppstå ut fra denne ved at to og to sirkler falt sammen slik at åtte sirkler ble til fire. Studerer vi determinanten for C-typen med dette i mente kan vi legge merke med noen interessante momenter. Her har vi et system der de inverse radiene til fire sirkler inngår. Imidlertid inngår de dobbelt opp, nemlig i første rad og første kolonne. Det viser seg nå at også determinanten kan generaliseres. Vi kan ha en gruppe sirkler i første rad, og en annen i første kolonne. Vi får da en sammenheng med fire sirkler som relaterer til fire andre sirkler. De åtte iradiene inngår i uttrykket, og alle vinkelavstandene mellom de to gruppene av sirkler. Vi kan sette sammenhengen opp som en setning.

Setning 35 *Gitt fire sirkler $r_1 - r_4$ og fire andre $s_1 - s_4$. Sirklene fra den ene gruppen danner v -avstander med sirklene i den andre gruppen. Vi benevner v -avstandene mellom en sirkel fra den ene gruppen og en fra den andre med $v_{i,j}$. Da kan vi sette opp relasjonen mellom v -avstandene og de inverse radiene*

på determinantform.

$$\begin{vmatrix} 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ s_1 & v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} \\ s_2 & v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} \\ s_3 & v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} \\ s_4 & v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.1)$$

Beviset for dette går nesten som for Cayley-determinanten, så vi skal ikke gå gjennom dette i denne omgang. Vi skal senere komme frem til visse forhold som gjør at det hele kan bevises enklere. Vi lar derfor dette teoremet gjelde i de følgende betraktninger og vi vil kalle sammenhengen *Hart-typen* eller kort *H-typen* fordi vi har tatt utgangspunkt i Hart-sirkelstrukturen.

Dermed har en sammenheng mellom hele åtte sirkler fremkommet. Disse deler seg i to ulike grupper med fire sirkler i hver der alle sirklene i den ene gruppen danner v -avstander med sirklene i den andre gruppen. Disse kan som vi skal se også bli til linjer og punkter. Med utgangspunkt i determinantuttrykket innfører vi konvensjonen horisontalelementer eller kort *H-elementer* for den ene gruppen, og vertikalelementer eller *V-elementer* for den andre gruppen.

7.2 Sirkelteoremer

Siden vi tok utgangspunkt i Hart-teoremet er det naturlig at dette fremkommer av H-typen. Her har vi bare tangering slik at vinkelavstanden blir -1 ved ytre tangering, og 1 ved omsluttende tangering. Setter vi inn i determinanten og regner ut får vi uttrykket for Hart-teoremet. Vi har sett at denne setningen kan gå over til Descartes setning, og dette gir seg jo umiddelbart når de åtte sirklene danner fire par.

Vi kan også se på en generalisering av Hart-teoremet. I stedet for å se situasjonen der alle sirklene tangerer hverandre ser vi på tilfellet der de danner samme v -avstand til hverandre.

Setning 36 *Generalisert Hart-teorem*

Gitt en gruppe A på tre sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} , og en gruppe B på fire sirkler \mathbf{e} , \mathbf{f} , \mathbf{g} og \mathbf{h} som skjærer sirklene i A under samme vinkel der ingen er appoloniuspar. Det finnes da en sirkel d som også skjærer sirklene i gruppe B med samme vinkel, og relasjonen mellom iradiene til alle sirklene er gitt ved

$$ae - af - ag + ah - be + bf - ag + ah - ce - cf + cg + ch + de + df + dg + dh \quad (7.2)$$

Bevis. Vi beholder imidlertid fortegnene som vi finner ved tangeringen. Det viser seg da at

$$\begin{vmatrix} 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ s_1 & v & -v & -v & v \\ s_2 & v & v & -v & v \\ s_3 & -v & -v & v & v \\ s_4 & v & v & v & v \end{vmatrix} = 0$$

som utregnet gir

$$4(ae - af - ag + ah - be + bf - ag + ah - ce - cf + cg + ch + de + df + dg + dh)v^3 = 0$$

Siden v -avstanden er utenfor parantesen er sammenhengen i parantesen uavhengig av v -avstanden. \diamond

Sammenhengen mellom iradiene til disse sirklene blir dermed den samme som ved tangering. Sirkler kan altså danne samme vinkler med hverandre, og summen av produktene til alle sirklene blir 0. Et corrolar av dette er da Hart-iradiusteorem. 3.12 Et annet corrolar har vi ved at de fire sirklene innskrevet i en trekant kan generaliseres til fire sirkler som har samme v -avstand til tre linjer.

Corrolar 7.1 *Gitt fire sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} og \mathbf{d} som skjærer tre linjer under samme vinkel. Da er realsjon mellom iradiene til disse gitt ved*

$$a + b + c + d = 0$$

Et annet eksempel har vi ved det vi kan kalle tetraederstrukturen for sirkler. .

Setning 37 *Gitt fire vilkårlige sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} og \mathbf{d} . Vi lar sirkelen $\bar{\mathbf{a}}$ være ortogonal til \mathbf{b} , \mathbf{c} og \mathbf{d} , og tilsvarende for sirkler $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ og $\bar{\mathbf{d}}$. V -avstandene mellom komplementære sirkler setter vi til v_s*

$$\frac{a\bar{a}}{v_a} + \frac{b\bar{b}}{v_b} + \frac{c\bar{c}}{v_c} + \frac{d\bar{d}}{v_d} = 0 \quad (7.3)$$

Bevis.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ \bar{a} & v_a & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b} & 0 & v_b & 0 & 0 \\ \bar{c} & 0 & 0 & v_c & 0 \\ \bar{d} & 0 & 0 & 0 & v_d \end{vmatrix} = 0$$

som utregnet gir

$$a\bar{a}v_bv_cv_d + b\bar{b}v_av_cv_d + c\bar{c}v_av_bv_d + d\bar{d}v_av_bv_c = 0$$

Ved å dele ut med $v_av_bv_cv_d$ får vi den søkte sammenhengen. \diamond

7.3 Punkt-linje dannelser

En klasse fenomener fremkommer hvis den ene gruppen av sirkler blir til punkter og den andre blir til linjer. Nå kan ikke alle elementene i den ene gruppen bli linjer fordi da får vi en hel rad med nuller i determinanten, og denne blir da trivielt lik 0. Et element må derfor være punkt eller sirkel, men dette elementet spiller ingen rolle i det metriske uttrykket fordi de andre elementene i raden er 0. Dermed får vi en sammenheng med tre linjer og fire punkter, og de eneste relasjonene er punktenes høyde til hver linje. Vi kan redusere sammenhengen til en firedimensjonal determinant.

Setning 38 *Gitt tre linjer l_1, l_2 og l_3 og fire punkter $P_1 - P_4$. Høyden fra P_i til l_j kaller vi $h_{i,j}$. Relasjonene mellom alle høydene er da uttrykt med*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ h_{1,1} & h_{2,1} & h_{3,1} & h_{4,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & h_{3,2} & h_{4,2} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & h_{3,3} & h_{4,3} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.4)$$

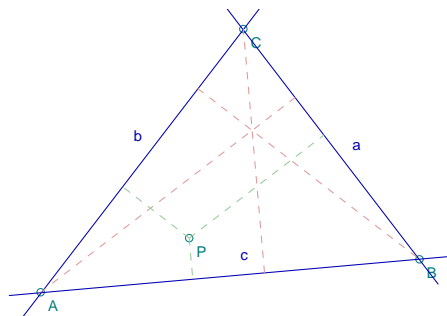
Bevis. Vi lar H-gruppen være punktene, og V-gruppen de tre linjene pluss et punkt. Vi får dermed determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h_{1,1} & h_{2,1} & h_{3,1} & h_{4,1} \\ 0 & h_{1,2} & h_{2,2} & h_{3,2} & h_{4,2} \\ 0 & h_{1,3} & h_{2,3} & h_{3,3} & h_{4,3} \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

Vi ser umiddelbart at denne determinanten reduseres til determinanten over fordi alle andre elementer blir 0. \diamond

Vi skal se på to forenklinger av dette uttrykket som vil gi kjente sammenhenger. I det ene tilfellet ser vi på situasjonen der tre av punktene er skjæringspunktene mellom to og to av linjene, mens det andre er vilkårlig.

Setning 39 Gitt en trekant ABC , og et punkt P . Høyden fra A til BC kaller vi H_a , og tilsvarende fra de andre hjørnene. Høydene fra P kaller vi P_a , P_b og P_c .



Summen av forholdene mellom punkthøyde og trekant høyde blir da 1, og uttrykket blir

$$\frac{P_a}{H_a} + \frac{P_b}{H_b} + \frac{P_c}{H_c} = 1 \quad (7.5)$$

Bevis. Høyden fra et punkt til en linje når punktet ligger på linjen er jo 0. Vi setter inn i determinanten og regner ut:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ H_a & 0 & 0 & P_a \\ 0 & H_b & 0 & P_b \\ 0 & 0 & H_c & P_c \end{vmatrix} = 0 \quad (7.6)$$

$$\Rightarrow P_a H_b H_c + P_b H_a H_c + P_c H_a H_b - H_a H_b H_c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{P_a}{H_a} + \frac{P_b}{H_b} + \frac{P_c}{H_c} = 1$$

og vi har vist forholdet. ◇

Lar vi P være senteret i en innskrevet sirkel endres dette til en setning for radien til en sirkel innskrevet i en trekant.

Setning 40 Gitt en sirkel innskrevet i en trekant. Da er radien til sirkelen gitt ved høydene ved

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} \quad (7.7)$$

Bevis. Vi setter de tre høydene fra P lik r , dividerer uttrykket over med r , og får setningen over. \diamond

Ved å knytte høydene til sider og arealet får vi formelen for innskrevet sirkel 6.11 som vi har sett tidligere

7.4 Koordinatsystem

En annen spesialisering av firerdeterminanten har vi når tre av punktene blir liggende på en linje. Vi får da en kjent relasjon fra koordiantgeometri.

Setning 41 *Gitt tre linjer, og tre punkter som ligger på en av linjene. Sammenhengen mellom høydene til de to andre linjene kan da uttrykkes ved.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.8)$$

Bevis. På samme måte som den 5×5 determinanten ble redusert til en 4×4 determinant får vi en videre reduksjon når tre av høydene blir i 0 7.4. \diamond

Dette er den kjente betingelsen for at tre punkter ligger på samme linje i et koordinatsystem.

Vi fortsetter litt i koordinatsystemet med en annen sammenheng, nemlig betingelsen for at fire punkter ligger på en sirkel. Her brukes Hart-determinanten litt annerledes.

Setning 42 *Gitt fire punkter $(x_1, y_1) - (x_4, y_4)$ i det kartesiske koordinatsystemet. Da er betingelsen for at punktene ligger på samme sirkel gitt ved*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

Bevis. Vi lar fire punkter $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_4$ gitt ved koordinatene $(x_1, y_1) - (x_4, y_4)$ danne V -gruppen, og en sirkel \mathbf{s} , koordiantaksene \mathbf{x} og \mathbf{y} og origo \mathbf{o} være H -gruppen. Vi lar de fire punktene ligge på \mathbf{s} . V -avstandene fra punktene

til \mathbf{s} blir 0, til \mathbf{x} og \mathbf{y} blir det koordinatene, og til \mathbf{o} som er et punkt har vi v-avstanden $\frac{x_i^2+y_i^2}{-2}$. Vi setter inn i determinanten.

$$\begin{array}{l} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{y} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{o} \quad \mathbf{r} \\ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & y_1 & \frac{x_1^2+y_1^2}{-2} \\ 1 & x_2 & y_2 & \frac{x_2^2+y_2^2}{-2} \\ 1 & x_3 & y_3 & \frac{x_3^2+y_3^2}{-2} \\ 1 & x_4 & y_4 & \frac{x_4^2+y_4^2}{-2} \end{array} \right| \begin{array}{c} r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} = 0$$

Vi multipliserer 3. kolonne med -2. Vi reduserer videre determinaten med 1 grad fordi vi det er fire 0 i siste kolonne, og oppnår setningen over. \diamond

Vi avslutter betraktningene av H-typen ved å vise hvordan cosinussetningen fremstår av denne. Også denne kan selvsagt vises enklere på andre måter, men vi vil se på visse momenter.

7.5 Cosinussetningen

Når man viser geometriske sammenhenger på kombinatorisk vis er ikke alltid lett å se hvordan metoden henger sammen med det som bevises. Ekstra hjelpeelementer og størrelser trekkes inn i bildet som ikke har noe med det endelige resultatet å gjøre. Dette forekommer også ved den morfologiske metode, og vi skal se hvordan cosinussetningen fremkommer på en slik måte.

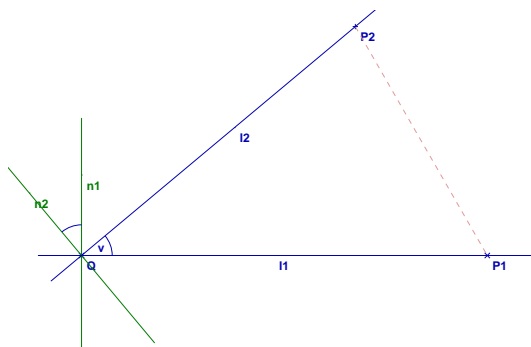
Setning 43 *Cosinussetningen*

Gitt en trekant QP_1P_2 der $QP_1 = a$, $QP_2 = b$, $P_1P_2 = c$ og $\angle P_1QP_2 = v$. Da har vi c gitt ved

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos v$$

Bevis. Vi har gitt trekanten QP_1P_2 , linjen l_1 mellom Q og P_1 og linjen l_2 mellom Q og P_2 . I tillegg har vi gitt normalene n_1 og n_2 til l_1 og l_2 gjennom Q . V-avstanden fra P_1 til n_1 vil da være lik a , og tilsvarende får vi v-avstanden fra P_2 til n_2 lik b . Videre blir vi klar over at vinkelen mellom normalene blir den samme som vinkelen mellom linjene og altså lik $\cos v$. Videre blir vinkelen mellom l_2 og n_1 lik $\pi - v$, og v-avstanden dem imellom $\sin v$. Til

slutt har vi at vinkelen mellom l_1 og n_2 lik $\pi + v$, og v-avstanden dem imellom $-\sin v$. Vi danner H-gruppen av elementene Q, P_1, l_2 og n_2 , og V-gruppen av elementene Q, P_2, l_1 og n_1 og setter inn i determinanten.



$$\begin{array}{c}
 \mathbf{Q} \\
 \mathbf{P}_2 \\
 \mathbf{l}_1 \\
 \mathbf{n}_1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{Q} \\
 \mathbf{P}_1 \\
 \mathbf{l}_2 \\
 \mathbf{n}_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 1 \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 1 \\
 \frac{-a^2}{2} \\
 0 \\
 a
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \cos v \\
 -\sin v
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 b \\
 \sin v \\
 \cos v
 \end{array}
 \Bigg| = 0$$

Utregnet gir dette

$$\Rightarrow \left(\frac{-c^2}{2} - \frac{-a^2}{2} - \frac{-b^2}{2} \right) (\cos^2 v + \sin^2 v) + ab \cos v = 0$$

Vi multipliserer igjennom med -2 og setter inn $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ og oppnår

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos v \tag{7.9}$$

og setningen er vist. ◇

Vi kunne gått videre i flere retninger for å utdype mulighetene til H-typen nærmere. Vi går imidlertid videre til enda en utvidelse av determinatsammenhengen.

Kapittel 8

Grunndeterminanten

Vi skal nå gjøre en siste generalisering av sirkelstrukturene, og her vil typen komme til uttrykk i sin mest bevegelige form.

Betrakter vi determinantformen slik den foreligger vil vi kunne bemerke at den inneholder bare to ulike typer størrelser. Den ene størrelsen er en relasjon mellom sirklene, nemlig v -avstanden mellom to og to. Den andre størrelsen er knyttet til den enkelte sirkel og er altså den inverse radien. Kan det tenkes at også disse størrelsene lar seg forbinde? Betenker vi nøyer hva radius til en sirkel er, vil vi måtte si at denne også er en relasjon. Radien er nemlig avstanden fra senteret i sirkelen til et punkt på periferien. Hvordan er det da med den inverse radien, skal den betraktes på samme måte eller ligger noe særskilt til grunn her? Vi er her igjen ved det spørsmål vi berørte innledningsvis. Hva kommer det av at det er den inverse radien som har en slik fremtredende plass i sirkelgeometrien?

Det viser seg at den inverse radius ikke er å betrakte ut fra senteret, men så og si motsatt. De inverse radier er nemlig å betrakte i forhold til en sirkel i uendelig. Vi skal se hvordan dette går til.

8.1 Den inverse radius som v -avstand.

Vi får ikke noe direkte resultat når vi forsøker å danne en vinkelavstand med et element i uendelig. Starter vi med to gitte sirkler, finner v -avstanden mellom disse, og lar senteret til en av sirkelen gå mot uendelig, da vil v -avstanden også gå mot uendelig. Imidlertid kan vi ha to sirkler s_1 og s_2 som danner v -avstandene v_1 og v_2 til en tredje sirkel, og la denne tredje gå mot

uendelig. Hver av vinkelavstandene v_1 og v_2 vil da gå mot uendelig, men forholdet mellom de to vil imidlertid ikke gjøre det. Forholdet mellom de to blir nemlig akkurat forholdet mellom de inverse radiene til de to sirklene.

Setning 44 *Gitt to sirkler r_1 og r_2 som danner v-avstandene v_1 og v_2 med en tredje sirkel r . Når senteret til sirkelen s går mot uendelig og radien holdes konstant, vil forholdet mellom v-avstandene v_1 og v_2 bli lik forholdet mellom iradiene r_1 og r_2 .*

Bevis: Vi setter inn uttrykkene for v-avstandene mellom sirklene, og lar avstanden øke til uendelig

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{r_1^2 + r^2 - a^2}{2r_1 r}}{\frac{r_2^2 + r^2 - (a+d)^2}{2r_2 r}} = \frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2}} \quad (8.1)$$

og setningen er bevist. ◇

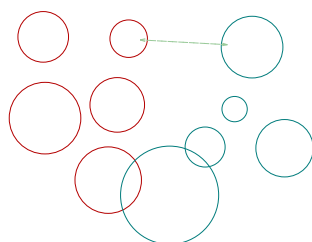
Det gåtefulle forhold med de inverse radier som stadig gjentar seg er altså uttrykk for sirklens vinkelavstand til elementer i uendelig.

Vi kunne latt alle typer element gå til uendelig og samme grenseforhold inntre. Også en sirkel med fast sentrum, men der radius blir uendelig stor, gir samme forhold. Det eiendommelige inntre da selv om vi kan la flere elementer gå til uendelig, vil dette alltid ha samme virkning på de konkrete strukturene. Vi skal også se at dette elementet egentlig har punktkarakter, og vi vil heretter betegne det som *punktet i uendelig* eller *elementet i uendelig*, og benevne det **u**.

8.2 System av ti sirkler

At det ligger et element i uendelig kan nå betraktes som et spesialtilfelle av en mer generell struktur. Vi kan betrakte dette som en ekstra dobbeltsirkel i tillegg til de åtte andre. Vi får da et system av i alt ti sirkler. Ved denne generaliseringen kan de ti sirklene ligge vilkårlig, ingen av dem må nødvendigvis ligge i uendelig. Hvis ingen sirkler ligger i uendelig erstatter vi iradier med v-avstander. Vi har da å gjøre med to ganger 5 sirkler, og en determinant som inneholder alle relasjonene fra den ene gruppen til den andre.

Setning 45 Gitt ti sirkler som er delt i to grupper på fem i hver gruppe. Sirklene betegnes med $s_1 - s_5$ og $t_1 - t_5$ og vinkelavstandene mellom s_i og t_j med $v_{i,j}$.



(8.2)

En relasjon mellom vinkelavstandene er da gitt ved

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{s}_1 \\
 \mathbf{s}_2 \\
 \mathbf{s}_3 \\
 \mathbf{s}_4 \\
 \mathbf{s}_5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{r}_1 \\
 \mathbf{r}_2 \\
 \mathbf{r}_3 \\
 \mathbf{r}_4 \\
 \mathbf{r}_5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 v_{11} \\
 v_{12} \\
 v_{13} \\
 v_{14} \\
 v_{15}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 v_{21} \\
 v_{22} \\
 v_{23} \\
 v_{24} \\
 v_{25}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 v_{31} \\
 v_{32} \\
 v_{33} \\
 v_{34} \\
 v_{35}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 v_{41} \\
 v_{42} \\
 v_{43} \\
 v_{44} \\
 v_{45}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 v_{51} \\
 v_{52} \\
 v_{53} \\
 v_{54} \\
 v_{55}
 \end{array}
 \Bigg| = 0
 \tag{8.3}$$

Vi ser at det bare er v-avstandene som inngår i selve determinanten, sirklene er bare benevnt utenfor. Vi har da kommet frem til en enkel symmetrisk fundamental struktur som vi vil kalle den generelle sirkeltypen eller kort S-typen. Denne er da utgangspunktet for alle de ulike determinantene og algebraiske relasjonene vi har sett på tidligere, og vi skal også se at den dekker flere andre sammenhenger. Symmetrien i uttrykket vil siden gjøre det enkelt å bevise setningen. Dette krever imidlertid noen begreper som vi først skal utvikle noe senere. 94

I artikkelen *On Systems of Circles and Spheres* gir R. Laclan [11] den essensielt samme determinatformen. Her bruker han imidlertid sirkelpotens mellom sirkler som grunnstørrelser i determinanten i stedet for v-avstand. Dette er en utvidelse av begrepet et punkts potens med hensyn på en sirkel. Sirkelpotens er definert som kvadratet av avstanden mellom sentrene til sirklene minus kvadratene av deres radier. Dette uttrykket er det samme som telleren i uttrykket for v-avstand. Nå er imidlertid fundamentaldeterminanten lik 0 slik at vi kan multiplisere rader og kolonner med samme faktor. Oppfatter vi på denne måten en sirkels v-avstander til fem andre sirkler som som

en homogen samling størrelser går de to systemene over i hverandre.

$$v_{(r,(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5))} \simeq k \cdot v_{(r,(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5))}$$

Definisjon av punkters v-avstand slik vi har gjort finner også sin plass her.

Selv om størrelsene lar seg overføre vil vi beholde som standard de v-avstander vi kom frem til i Kap.6 6.9 fordi disse størrelsene er egnet til å se på de fenomenområder vi tar for oss. Dette henger særlig sammen med at v-avstanden blir ± 1 ved tangering, mens potensen mellom sirkler blir $\pm r_1 r_2$.¹

S-typen lar seg uten videre generalisere til høyere dimensjoner. Vi vil blant annet ha en struktur på 12 kuler i rommet, og generelt vil vi ha $2(k+3)$ (k-1)-sfærer i det k-dimensjonale rommet, og sammenhengen mellom v-avstandene er gitt ved determinanten

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_n \\ \mathbf{s}_1 & \left| \begin{array}{cccc} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n,1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{n,n} \end{array} \right| & & \\ \mathbf{s}_2 & & & & \\ \cdots & & & & \\ \mathbf{s}_n & & & & \end{array} = 0 \quad (8.4)$$

Vi skal ikke gå systematisk inn på forholdene i høyere dimensjoner, men senere se på enkelte eksempler.

I sin mest generelle form er S-typen svært flytende og den sier ikke noe bestemt før vi spesialisere. Nå har S-typen utviklet seg fra H-typen, slik at det vi har sett tidligere også bestemmes av S-typen. Vi vil her se på to andre spesialiseringer av S-typen som vil bringe frem andre fenomener. Den ene sammenhengen fremkommer når de fem sirklene dobler seg, og den andre ved at et av elementene går til uendelig.

¹Laclan benevner potensen mellom sirkler \mathbf{r} og \mathbf{s} $\pi_{rs} = r^2 + s^2 - a^2$ der a er avstanden mellom sentrene til sirklene. Han gir da blant annet sammenhengen i tetraederstrukturen 7.3 ved $\frac{1}{\pi_{r_1 s_1}} + \frac{1}{\pi_{r_1 s_1}} + \frac{1}{\pi_{r_1 s_1}} + \frac{1}{\pi_{r_1 s_1}} = 0$ Dette er en mer elementær sammenheng enn den vi har gitt, men overgangen er enkel når vi skriver ut v-avstandene. Vi har gitt leddene $\frac{r_i s_i}{v_{r_i s_i}}$ mens Laclan har $\frac{1}{2\pi}$. Disse uttrykkene er egentlig de samme og vi har overgangen ved. $\frac{r_i s_i}{v_{r_i s_i}} = \frac{r_i s_i}{\pi_{r_i s_i} / 2rs} = \frac{1}{2\pi}$ Ved å multiplisere gjennom har vi uttrykket til Lachlan. Ut fra artikkelen ser det ut til at potensen mellom sirkler er egnet til å betrakte forhold knyttet til punkters forhold til sirkler.

8.3 V-typen

S-typen inneholder bare v-avstander, og den kan benyttes til å finne ukjente v-avstanden når vi kjenner andre. Til dette formål kan vi ofte anvende en spesialisering. Slik som C-typen fremkommer ved at to og to sirkler i H-typen faller sammen, slik finner vi en struktur av fem sirkler og v-avstandene mellom dem ved at to og to sirkler i S-typen faller sammen.

Setning 46 *Gitt fem sirkler s_1 – s_5 der v-avstandene mellom s_i og s_j betegnes med $v_{i,j}$. En relasjon mellom v-avstandene er da gitt ved*

$$\begin{array}{c} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{s}_5 \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \end{array} \left| \begin{array}{c} 1 \\ v_{21} \\ v_{31} \\ v_{41} \\ v_{51} \\ v_{12} \\ 1 \\ v_{32} \\ v_{42} \\ v_{52} \\ v_{13} \\ v_{23} \\ 1 \\ v_{43} \\ v_{53} \\ v_{14} \\ v_{24} \\ v_{34} \\ 1 \\ v_{54} \\ v_{15} \\ v_{25} \\ v_{35} \\ v_{45} \\ 1 \end{array} \right| = 0 \quad (8.5)$$

Vi kaller denne sammenhengen for *V-typen* fordi vi anvender den til å finne sammenhenger mellom v-avstander. Denne strukturen kan benyttes i tallrike strukturer for å finne ulike relasjoner mellom v-avstander.

Ved V-typen kan vi finne en ukjent v-avstand i en struktur med fem sirkler når de andre v-avstandene er kjent. Dette er en aktuell problemstilling i mange sammenhenger. Vi ser først på en problemstilling gitt av J.G. Mauldon [7] der V-typen fremstår i sin mest symmetriske form. Spørsmålet her er hvorvidt fem sirkler kan skjære hverandre under samme vinkel.

Setning 47 *Mauldons setning.*

Gitt fem sirkler a , b , c , d og e som gjensidig skjærer hverandre under samme vinkel. Da er v-avstanden mellom sirklene lik $\frac{-1}{4}$. Videre er summen til iradiene lik 0.

$$a + b + c + d + e = 0$$

Bevis. Vi har gitt V-typen, og setter inn bare like v-avstander v , og regner ut determinanten

$$\begin{array}{c} 1 \\ v \\ v \\ v \\ v \\ v \end{array} \begin{array}{c} v \\ 1 \\ v \\ v \\ v \\ v \end{array} \begin{array}{c} v \\ v \\ 1 \\ v \\ v \\ v \end{array} \begin{array}{c} v \\ v \\ v \\ 1 \\ v \\ v \end{array} \begin{array}{c} v \\ v \\ v \\ v \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} 1 \\ v \\ v \\ v \\ v \\ v \end{array} \right| = 0$$

$$\Rightarrow (v - 1)^4(4v + 1) = 0$$

Her er $v = 1$ trivielle løsninger der alle sirklene faller. Den ikke-trivielle løsninger er dermed at fem sirkler kan danne v -avstand $v = -\frac{1}{4}$ til hverandre, og påstanden er vist. \diamond

For seks kuler i rommet får vi $v = \frac{-1}{5}$ og generelt for n -rommet har vi $v = \frac{-1}{n+2}$. I det nulldimensjonale tilfellet har vi tre sirkler gjennom et felles punkt, og da er $v = \frac{-1}{2}$ som stemmer overens med at sirklene danner 120° vinkler med hverandre. [5.2](#)

Videre har vi sammenhenger der det opptrer ikke bare en, men to relaterte v -avstander i en struktur. En slik sammenheng har vi i Descartes II. teorem. Alle v -avstander her ± 1 bortsett fra mellom den indre og den ytre sirkelen. Denne er den eneste ukjente i determinantuttrykket, og vi kan da finne denne.

Setning 48 *Gitt dannelsen til Descartes II. teorem. Da er v -avstanden mellom indre og ytre sirkel i strukturen lik -7 .*

Bevis. Tre sirkler **a**, **b** og **c** tangerer hverandre gjensidig, og to sirkler **d** og **e** som omskriver og er innskrevet i disse [9.5](#). Vi setter v -avstandene mellom dem inn i V -typen og regner ut

$$\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{d} \quad \mathbf{e} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & v \\ -1 & -1 & -1 & v & 1 \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

Dette gir ligningen

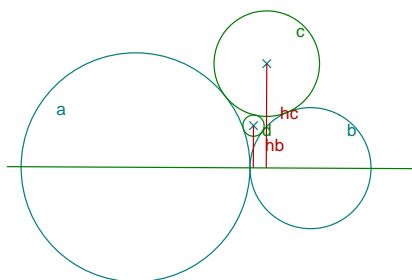
$$(v - 1)(v + 7) = 0$$

Her er en triviell løsning $v = 1$ når sirklene falle sammen, mens løsningen $v = -7$ er v -avstanden mellom de to sirklene. \diamond

Forskjellen på determinanten vi brukte her, og determinanten vi brukte for å finne Descartes teorem er egentlig bare at vi har byttet ut elementet **u** i uendelig med den omskrevne sirkelen til strukturen. Vi kan også erstatte dette elementet med en linje gjennom senteret til to av sirklene, og vil da oppnå en sammenheng som går helt tilbake til Pappos, og som Jakob Steiner gjorde utstrakt bruk av blant annet ved sitt bevis av Descartes teorem.

Setning 49 Pappos porism

Gitt en Descartstruktur med sirklene **a**, **b**, **c** og **d**, og en linje **l** gjennom sentrene til **a** og **b**. Vi kaller høyden fra sentrene til **c** og **d** til **l** for h_c og h_d , og radien til disse sirklene \acute{c} og \acute{d} .



Danner vi forholdet høyden og radien til de to sirklene vil differansen mellom de to være 2.

$$\frac{h_d}{\acute{d}} - \frac{h_c}{\acute{c}} = 2 \quad (8.6)$$

I vår terminologi vil vi si at differansen mellom v-avstandene de to sirklene danner til linjen er lik 2.

Bevis. Vi har gitt de fire sirklene **a**, **b**, **c** og **d** og linjen **l**. V-avstandene mellom alle sirklene er -1, og linjens v-avstand til **a** og **b** er 0. Linjens v-avstander til **c** og **d** setter vi til v_{lc} og v_{ld} . Vi setter dette inn i V-determinanten.

$$\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{l} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{d} \quad \mathbf{l} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & v_{lc} \\ -1 & -1 & -1 & 1 & v_{ld} \\ -1 & -1 & v_{lc} & v_{ld} & 1 \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

Vi regner ut determinanten og får

$$(v_{lc} - v_{ld} + 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_{ld} - v_{lc} = 2$$

og vi har dermed vist setningen. ◇

Ved V-typen kan vi også finne mer sammensatte relasjoner mellom v-avstansrelasjoner. Vi skal se på analogen til Pytagoras setning for å vise noe av poenget. Pytagoras setning kan forstås som relasjoner mellom sidene og diagonalene i et rektangel, og et rektangel kan alltid skrives inn i en sirkel. Det analoge bildet er da fire sirkler ortogonale til samme sirkel der v-avstandene mellom to og to par er den samme.

Setning 50 *Gitt fire sirkler som alle er ortogonale til en femte sirkel. V-avstandene mellom to og to av sirklene er den samme. Da er relasjonene mellom v-avstandene gitt ved*

$$\alpha + \beta = \gamma + 1$$

Bevis. Vi har fire sirkler **a**, **b**, **c** og **d** som alle er ortogonale til samme sirkel **r**. Disse danner et *sirkelrektangel* ved at to og to v-avstander er like store. Vi setter $v_{a,b} = v_{c,d} = \alpha$, $v_{a,d} = v_{b,c} = \beta$ og $v_{a,c} = v_{b,d} = \gamma$. Vi anvender V-typen for å finne relasjonen mellom de tre v-avstandene.

$$\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{r} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{d} \quad \mathbf{r} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & \alpha & \gamma & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & \beta & \gamma & 0 \\ \gamma & \beta & 1 & \alpha & 0 \\ \beta & \gamma & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

Dette gir utregnet

$$(1 + \alpha + \beta + \gamma)(1 + \alpha - \beta - \gamma)(1 - \alpha + \beta - \gamma)(1 - \alpha - \beta + \gamma) = 0 \quad (8.7)$$

Det blir altså fire varianter av relasjonene som kan være lik 0. Dette avhenger av hvilken av v-avstandene som er diagonalen. Er for eksempel γ diagonalen er denne gitt ved

$$\gamma = \alpha + \beta - 1$$

◇

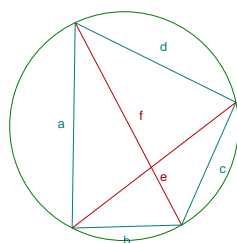
Vi legger her merke til at når fire sirkler er ortogonal til den samme sirkelen får vi fire nuller i raden og kolonnen der denne forekommer. Vi kan da redusere determinanten med 1 grad slik at vi får en 4×4 *redusert determinant* mellom de resterende elementene. ²

²På samme måte kunne vi redusert determinanten for kuler ortogonale til en bestemt kule i rommet, og kommet frem til en 5×5 determinant. Denne determinanten blir da

Når fire sirkler er ortogonale til en femte, men ellers ligger fritt i forhold til hverandre får vi altså en 4×4 determinant. Skriver vi denne sammenhengen ut vil den ikke kunne faktoriseres som tilfellet var ved analogien til Pytagoras setning. Lar vi imidlertid de fire ortogonale sirklene bli til punkter vil en slik faktorisering være mulig.

Setning 51 *Ptolemaios setning*

Gitt en firkant innskrevet i en sirkel.



Da er summen av produktene av lengdene til motstående sider, lik prduktet av lengdene til diagonalene.

$$ac + bd = ef \tag{8.8}$$

Bevis. Vi har fire punkter på en sirkel. Avstandene mellom punktene er gitt ved størrelsene $a - f$. Vi setter inn i determinanten til V-typen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{-2} & \frac{b^2}{-2} & \frac{e^2}{-2} \\ 0 & \frac{a^2}{-2} & 0 & \frac{f^2}{-2} & \frac{d^2}{-2} \\ 0 & \frac{b^2}{-2} & \frac{f^2}{-2} & 0 & \frac{c^2}{-2} \\ 0 & \frac{e^2}{-2} & \frac{d^2}{-2} & \frac{c^2}{-2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & e^2 \\ a^2 & 0 & f^2 & d^2 \\ b^2 & f^2 & 0 & c^2 \\ e^2 & d^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Utregnet og faktorisert får vi

$$\Rightarrow (ac + bd + ef)(ac + bd - ef)(ac - bd + ef)(-ac + bd + ef) = 0 \tag{8.9}$$

Dette er varianter av Ptolemaios setning , der vi har negativt fortegn der avstandene er gitt ved diagonalene. \diamond

akkurat tilsvarende den for sirkler i planet, og vi kan derfor se på sirklene i planet som et spesialtilfelle av kuler ortogonale til en gitt sirkel i rommet.

Vi skal anvende V-typen i mange konkrete tilfeller etterhvert. Nå ser vi imidlertid på en annen sentral spesialisering av den generelle S-typen som ofte vil kunne anvendes sammen med V-typen.

Som vi har sett er sammenhengen mellom Sirkel-typen og Hart-typen at for den siste ligger to sirkler i uendelig. I stedet for å la en dobbel sirkel ligge i uendelig kan vi nå la en gå mot uendelig. Derved får vi den inverse radien i bare en rad eller en kolonne, og dette gir en lineær sammenheng mellom iradiene til sirklene.

8.4 Lineære sammenhenger

I de fleste av uttrykkene for sirkelsammenhenger vi har sett så langt har vi hatt med annengradsformer former å gjøre. Unntak fra dette er Fire-innskrevneteoremet som inntreffer når tre sirkler blir til linjer. Andre eksempler på lineære forhold har vi ved Descartes II. og III. teorem. Disse teoremene fremkommer imidlertid ut fra Descartes I. teorem og ikke direkte ut fra typen. Grunnen til at kvadratiske uttrykk i regelen har oppstått er at vi har gått ut fra en dobbel sirkel i uendelig. Hvis vi i stedet lar bare en sirkel gå til uendelig fremkommer en lineær sammenheng. Denne sirkelen vil da indusere de inverse radiene til den ene gruppen sirkler. Derimot vil ikke de fire resterende sirklene i samme gruppe som elementet u i uendelig være representert med invers radius.

Setning 52 *Gitt fem sirkler $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5$ i en gruppe og fire sirkler $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_4$ i en annen. Vi setter v -avstanden $v_{r_i s_j} = v_{ij}$. Da vil relasjonene mellom v -avstandene mellom v -avstandene og iradiene til $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5$ være gitt ved*

$$\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3 \quad \mathbf{r}_4 \quad \mathbf{r}_5 \\ \mathbf{u} \quad \left| \begin{array}{ccccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} & v_{54} \end{array} \right| \\ \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \end{array} = 0$$

Bevis. Vi starter med determinanten til S-typen, og lar H-gruppen bestå av fem sirkler $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5$, mens V-gruppen består av fire sirkler $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_4$ og en linje l . Vi lar l være parallell med en linje \mathbf{m} , og vi har at avstandene fra \mathbf{m} til

hver av sirklene $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5$ er gitt med $h_1 - h_5$. Avstanden mellom \mathbf{l} og \mathbf{m} er gitt med a , slik at avstandene mellom sirklene og \mathbf{l} er $a + h_j$. Vi kan da sette opp en determinanten til S-typen der v-avstandene mellom sirklene $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5$ og linjen \mathbf{l} er skrevet ut.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3 \quad \mathbf{r}_4 \quad \mathbf{r}_5 \\
 \begin{array}{c}
 \mathbf{S}_1 \\
 \mathbf{S}_2 \\
 \mathbf{S}_3 \\
 \mathbf{S}_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccccc}
 \frac{a+h_1}{r_1} & \frac{a+h_2}{r_2} & \frac{a+h_3}{r_3} & \frac{a+h_4}{r_4} & \frac{a+h_5}{r_5} \\
 v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\
 v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\
 v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} & v_{54} \\
 v_{15} & v_{25} & v_{35} & v_{45} & v_{55}
 \end{array} \right| = 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Vi dividerer gjennom første rad med a , og lar så linjen \mathbf{l} bevege seg mot uendelig. Avstanden a vil da gå mot uendelig, og vi oppnår determinanten over og setningen er bevist. \diamond

Vi har dermed fått en determinantform der iradiene bare forekommer i en rad og ikke kolonne. Det gir opphav til lineære sammenhenger mellom iradiene, og vi vil kalle strukturen *L-typen*. Elementet i uendelig vil vi benevne \mathbf{u} .

Denne strukturen kan vi ikke anvende så direkte som for C-typen og H-typen sin del. Vi har nemlig fem sirkler i strukturen, og det er ikke mulig å finne fem sirkler der alle har trivielle v-avstander til hverandre. Vi har imidlertid sett at vi kan finne ukjente v-avstander ved å anvende V-typen, og disse kan da benyttes i L-typen. En slik struktur har vi nå ved Mauldons struktur. Her kjenner vi alle v-avstanden mellom sirklene, og kan dermed finne en sammenheng mellom de inverse radiene. Teknikken er nå å bytte ut en av sirklene i strukturen med elementet \mathbf{u} i uendelig.

Setning 53 *Gitt fem sirkler $\mathbf{a-e}$, som alle har v-avstand $\frac{-1}{4}$ til hverandre. Da er relasjonen mellom deres iradier gitt ved*

$$a + b + c + d + e = 0 \tag{8.10}$$

I V-typen har vi med fem doble sirkler og deres innbyrdes v-avstander å gjøre. Vi erstatter nå den ene av de to sirklene i et av parene med sirkelen \mathbf{u} i uendelig. Denne vil da gi de inverse radiene i raden den forekommer, og vi

får et uttrykk med inverse radier.

$$\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ a & b & c & d & e \\ \frac{-1}{4} & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 1 & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 1 \end{array} \right| = 0$$

Dette gir utregnet

$$\Rightarrow a + b + c + d + e = 0$$

og setningen er bevist. \diamond

Her må bemerkes at vi også kunne funnet radien til en fjerde ut fra tre andre sirkler ved å anvende Cayley-typen. Dette gir en annengradsligning som akkurat gir den fjerde og den femte sirkelen. Disse har imidlertid kompleks radius, men fordi de er komplekst konjugerte blir summen reell.

På samme vis som over kan vi gi et direkte bevis for sammenhengen mellom de fem sirklene i Descartes II. teorem.

Bevis. Descartes II.teorem. 11

Vi har strukturen for Descartes II. teorem. Her har vi tre sirkler **a**, **b** og **c** som gjensidig tangerer hverandre, og sirklene **d** og **e** som omskriver og er innskrevet i disse 9.5. Vi har sett at v-avstanden mellom indre og ytre Descartessirkel er -7, og kan ta den med i uttrykket. Vi lar sirklene **a** – **e** være H-gruppen, mens vi bytter ut **e** med **u** i V-gruppen. Vi får determinanten

$$\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -7 \end{array} \right| = 0$$

Utregnet gir dette

$$d - e = 2(a + b + c)$$

som er descartes III. teorem. \diamond

Både S-typen og de to spesielle variantene vil vi anvende mer etterhvert. Dette vil vi gjøre i tilknytning til bestemte sirkelgeometriske områder som vi skal se nærmere på.

Kapittel 9

Sirkelgeometrier

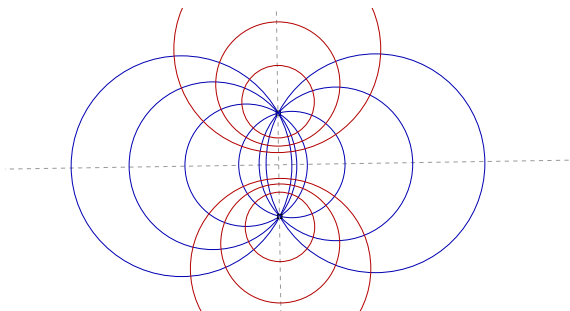
I naiv forstand bygger man opp geometrier med punkter som grunnelement. Linjer sees da på som en endimensjonal mengde punkter, plan som en todimensjonal mengde. Sirkler er i denne sammenheng en samling punkter med en gitt avstand til et fast punkt. Oppdagelsen av dualitetsprinsippet mellom punkter og linjer gjorde at dette syn ble endret, og man fant etterhvert ut at mange elementer kunne sees på som grunnelementer i geometrier. I denne sammenheng ble det funnet måter å strukturere geometrier med sirkler som grunnelement. Vi skal her se hvordan vi kan de 10 sirklene i S-typen kan struktureres ut fra dette syn, og hvordan S-typen så kan anvendes til å beskrive forhold i disse strukturene.

En måte som vi kan strukturere sirkler i en geometri på er ved den såkalte Møbiusgeometri S_3 , og vi skal se at vi kan knytte denne til S-typen.

Sirkel i planet er her grunnelementet og disse sirklene danner en tredimensjonal mengde.¹ Her er et sirkelplan definert som alle sirklene som er ortogonale til en gitt sirkel. Denne sirkelen representerer da dette planet. Dette gir opphav til et polaritetsprinsipp, en sirkel kan representere et punkt eller den kan representere et plan. Alle plan gjennom et gitt punkt i denne geometrien vil gi eksakt samme bilde som alle punkter i et plan, nemlig mengden av sirkler som er ortogonale til samme sirkel. Her finner vi også grunnen til at vi kalte en viss struktur tetraederstrukturen 7.3. Her har vi fire sirkler, og fire andre som er ortogonale til tre og tre av disse. Dette tilsvarer fire punkter i R^3 og fire plan gjennom tre og tre av punktene som akkurat er et tetraeder.

¹Som oftest ser man på geometrien til alle sfærer ortogonal til en gitt sfære i rommet, men denne geometrien er essensielt den samme som sirkler i planet.

En linje i denne geometrien vil være snittet av mengdene to plan danner, og vi kaller denne mengden en *sirklebunt*. Alle sirklene i denne bunten vil ha to felles punkter, og disse kan være reelle eller komplekse. Vi kan videre gjøre en sammenligning med R_3 . Her inneholder en linje på den side en endimensjonal mengde punkter, og på den andre en endimensjonal mengde plan. I sirkelgeometrien vil dette gjøre seg gjeldende som en sirkelbunt, og en samling sirkler som er ortogonale til alle sirklene i bunten, som også danner en sirkelbunt. Disse sirkelbuntene sier vi er *coaxale*.



9.1 Metriske forhold i Møbiusgeometrien

Vi fortsetter sammenligningen mellom S_3 og forhold i R_3 . Vi tenker oss tre plan i R_3 som har en felles linje. På det midterste planet har vi gitt et punkt, og fra dette punktet har vi gitt høydene til de to andre planene. Vi ser intuitivt at forholdet mellom disse høydene vil være konstant når punktet beveger seg.

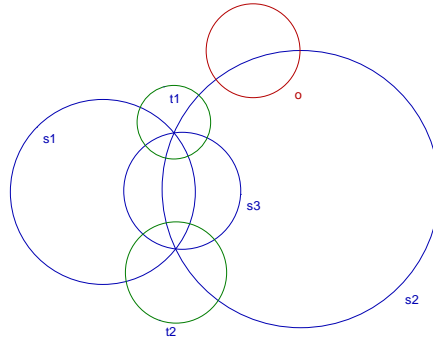
Denne egenskapen er fundamentalt for de geometriske elementene det er snakk opp, det viser lineariteten i strukturene. Vi skal etablere den samme strukturen for S_3 , og vise tilsvarende fundamentale forhold i S_3 .

Setning 54 *Gitt tre sirkelplan s_1 , s_2 og s_3 i S_3 med en felles linje. Vi har gitt en sirkel s ortogonal til p_1 . Da vil forholdet mellom v -avstandene fra s til s_1 og s_2 er konstant.*

$$\frac{v_{sp_1}}{v_{sp_2}} = k \quad (9.1)$$

Bevis. De tre sirkler s_1 , s_2 og p vil alle være ortogonale til sirklene i den coaksale sirklebunten siden de har en felles linje, og vi velger sirklene r_1 og r_2 fra denne bunten. På sirkelen p har vi nok en ortogonal sirkel o , som svarer

til et punkt i planet i dette planet.



Vi anvender nå S-typen på denne situasjonen. Vi har i alt seks sirkler i strukturen. Vi modifiserer V-typen, og lar fire av sirklene være doble, mens det femte paret utgjøres av \mathbf{p} og sirkelen \mathbf{o} ortogonal til denne. Vi setter inn de ulike v -avstandene i determinanten.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{p} \\
 \mathbf{s}_1 \\
 \mathbf{s}_2 \\
 \mathbf{r}_1 \\
 \mathbf{r}_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{o} \quad \mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \\
 \left| \begin{array}{ccccc}
 0 & v_{ps_1} & v_{s_1s_2} & 0 & 0 \\
 v_{os_1} & 1 & v_{s_1s_2} & 0 & 0 \\
 v_{os_2} & v_{s_1s_2} & 1 & 0 & 0 \\
 v_{or_1} & 0 & 0 & 1 & w \\
 v_{or_2} & 0 & 0 & w & 1
 \end{array} \right| = 0
 \end{array}$$

Dette gir utregnet

$$\Rightarrow \frac{v_{os_1}}{v_{os_2}} = \frac{v_{ps_1}v_{s_1s_2} - v_{ps_1}}{v_{ps_1} - v_{ps_2}v_{s_1s_2}} \quad (9.2)$$

Bare v -avstandene v_{os_1} og v_{os_2} er knyttet til \mathbf{o} , og når denne flytter seg på \mathbf{p} vil bare disse v -avstandene endre seg, men forholdet mellom dem vil være konstant. \diamond

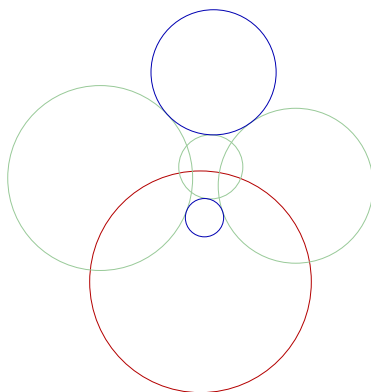
Vi ser dermed at v -avstanden spiller en lignende rolle i S_3 som normalavstanden i R_3 . Dette forholdet kan omskrives til $\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_2}$ der θ er vinklene mellom ortogonalsirkelen \mathbf{o} og s_1 og s_2 , mens ψ er vinklene mellom \mathbf{p} og s_1 og s_2 .

9.2 Inversjon

Et sentralt tema i S_3 er inversjon. Dette tilsvarer å speile et punkt over et plan i R_3 .

I alminnelighet defineres inversjon som et bestemt forhold mellom en sirkel og punkter, men her gjør vi det ut fra sirkelen som grunnelement. Inversjon av punkter blir da et spesialtilfelle av sirkelinversjon. Den følgende definisjonen er litt omstendelig, men er en beskrivelse av en sirkel som speiles over en annen.

Definisjon 9.1 *Vi har gitt en fast sirkel c , og en variabel sirkel a . Gitt videre tre sirkler s_1 , s_2 og s_3 som tangerer a og som er ortogonale til c . Den sirkelen b som tangerer de tre sirklene s_1 , s_2 og s_3 og som danner appoloniuspar med a , er den inverterte sirkelen til a med hensyn på c .*



Setning 55 *Vi har to linjer gjennom senteret til inversjons sirkelen c som tangerer en variabel sirkel a . Den inverterte sirkelen b vil også ligge mellom disse linjene, og $v_{a,c} = -v_{b,c}$.*

Bevis. Vi kan velge to av de ortogonale sirklene som linjene l og m . Disse vil da gå gjennom senteret til inversjons sirkelen, og ut fra definisjonen vil den inverterte sirkelen også gjøre dette. Vi kan da sette opp V-typen for a og c

de to linjene og en tredje sirkel \mathbf{r} ortogonal til \mathbf{c} .

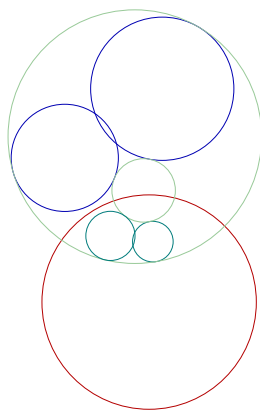
$$\begin{array}{c}
 \mathbf{a} \\
 \mathbf{c} \\
 \mathbf{r} \\
 \mathbf{l} \\
 \mathbf{m}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{a} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{r} \quad \mathbf{l} \quad \mathbf{m} \\
 \left| \begin{array}{ccccc}
 1 & v_{a,c} & -1 & -1 & -1 \\
 v_{a,c} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 1 & v_{r,l} & v_{r,m} \\
 -1 & 0 & v_{r,l} & 1 & v_{l,m} \\
 -1 & 0 & v_{r,m} & v_{l,m} & 1
 \end{array} \right| = 0
 \end{array}$$

Determinanten for den inverterte sirkelen vil se akkurat lik ut bortsett fra at $v_{a,c}$ skifter fortegn. Dette vil ikke endre \diamond

Et sentral egenskap ved inversjon er at den er konform, det vil si vinkelbevarende.

Setning 56 *Vi har gitt en inversjonsirkel \mathbf{c} , og to sirkler \mathbf{a} og \mathbf{b} med v -avstand $v_{a,b}$. Da vil v -avstanden $v_{\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}}$ mellom de inverterte sirklene $\bar{\mathbf{a}}$ og $\bar{\mathbf{b}}$ være lik $v_{a,b}$.*

Bevis. I tillegg til \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} legger vi inn to sirkler \mathbf{r} og \mathbf{s} som er ortogonale til \mathbf{c} og som tangerer \mathbf{a} og \mathbf{b} .



Vi setter opp V-determinanten til disse fem sirklene, og v -avstanden $v_{a,b}$

mellom **a** og **b** er da gitt implisitt.

$$\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{r} \quad \mathbf{s} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & v_{a,b} & v_{a,c} & -1 & -1 \\ v_{a,b} & 1 & v_{b,c} & -1 & -1 \\ v_{a,c} & v_{b,c} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & v_{r,s} \\ -1 & -1 & 0 & v_{r,s} & 1 \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

Ved inversjon får vi sirklene $\bar{\mathbf{a}}$ og $\bar{\mathbf{b}}$, og disse har samme relasjoner til de øvrige elementene som **a** og **b** bortsett fra $v_{\bar{a},c}$ og $v_{\bar{b},c}$ som skifter fortegn. Vi kan imidlertid multiplisere med -1 i raden og kolonnen der disse størrelsene forekommer, og determinanten er dermed uendret. Vinkelen $v_{\bar{a},\bar{b}}$ er da like stor som $v_{a,b}$ og bevares altså ved inversjon. \diamond

Vi kan bestemme iradien til den inverterte sirkelen når vi kjenner iradien til inversjons sirkelen og den variable sirkelen, og v-avstanden deres.

Setning 57 *Vi har inversjons sirkelen **c**, en variabel sirkel **a** og den inverterte sirkel **b**. V-avstanden mellom **c** og **a** er gitt ved $v_{c,a}$. Da har vi relasjonen*

$$a + b = 2cv_{c,a} \quad (9.3)$$

Bevis. Vi har at vinkelen mellom a og b er den dobbelte av vinkelen mellom a og c. V-avstanden $v_{a,b}$ er dermed gitt ved

$$v_{a,b} = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 2v_{a,c}^2 - 1$$

Vi har tre sirkler som alle er ortogonale til samme linje, og vi kan dermed benytte en redusert C-type mellom de tre elementene for å finne en relasjon mellom størrelsene.

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 0 & a & b & c \\ a & 1 & 2v^2 - 1 & v \\ b & 2v^2 - 1 & 1 & v \\ c & v & v & 1 \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

Dette gir utregnet

$$a + b = 2cv_{c,a}$$

og vi har vist sammenhengen. \diamond

Når sirklene er konsentriske inntreer det et elementært forhold mellom radiene som vi kan knytte til punktinversjon.

Corrolar 9.1 *Vi har gitt en inversjons sirkel c , en variabel sirkel a som er konsentrisk med denne, og den inverterte sirkelen b . Da er relasjonen mellom iradiene gitt ved*

$$ab = c^2$$

Bevis. Når to sirkler a og c er konsentriske er deres v-avstand gitt ved $\frac{a^2+c^2}{2ac}$ som er lik $\frac{a^2+c^2}{2ac}$. Vi setter dette inn i uttrykket 9.2 over

$$\begin{aligned} a + b &= 2c \frac{a^2 + c^2}{2ac} \\ \Rightarrow ab + a^2 &= a^2 + c^2 \\ \Rightarrow ab &= c^2 \end{aligned}$$

og vi har vist relasjonen. ◇

Dette fører også umiddelbart til definisjonen for punkt inversjon.

Corrolar 9.2 *Gitt et punkt P en inversjons sirkel c , og det inverterte punktet Q . Da er produktet av avstandene fra senteret til sirkelen til de to punktene lik kvadratet av radien til sirkelen.*

Bevis. Vi lar en sirkel s_P gå gjennom punktet P . Det inverterte punktet Q vil da ligge på den inverterte sirkelen s_Q og avstandene fra senteret til punktene blir radiene til disse sirklene, og samme forhold som over gjelder. ◇

Vi avslutter betraktningene over inversjon ved en konkret anvendelse som viser åttesirkelteoremet. Vi etablerer først en forbindelse mellom inversjons-sirkelen og fire appoloniussirkler.

Setning 58 *Gitt tre sirkler f , g og h , ortogonalsirkelen r til disse, og fire appoloniussirkler a , b , c og d til f , g og h hvorav ingen danner par. Iradien til ortosirkelen r er da lik summen av iradiene til appoloniussirklene delt på summen av v-avstandene disse danner til r .*

$$r = \frac{a + b + c + d}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \tag{9.4}$$

Bevis. Vi har tre sirkler **f**, **g** og **h**, ortosirkelenen **r** til disse og fire appoloniussirkler **a**, **b**, **c** og **d** til disse hvorav ingen er par.

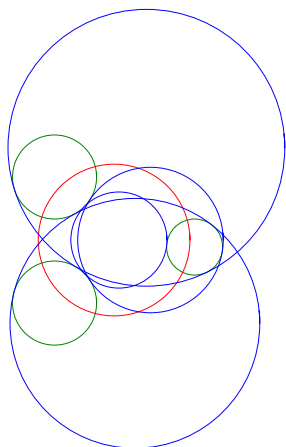


Fig.1

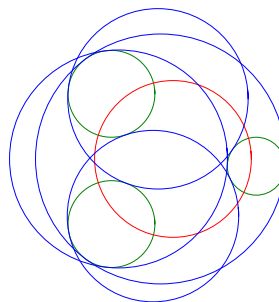


Fig.2

Vi vil danne et uttrykk der relasjoner mellom de fire A-sirklene kommer til uttrykk. Vi anvender S-typen og gir V-gruppen ved **f**, **g**, **h**, elementet **u** i uendelig og **r**. I H-gruppen har vi appoloniussirklene og **a**, **b**, **c** og **d** og igjen **r**. Vi oppnår da at H-gruppen blir representert med radier og med vinklene $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mellom (**a**, **b**, **c**, **d**) og **r**, mens sirklene **f**, **g** og **h** bare har trivielle v-avstander i uttrykket.

$$\begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{r} \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} r & a & b & c & d \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array} \right| = 0$$

Resultatet kan gies på formen

$$r(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = a + b + c + d \tag{9.5}$$

og som uttrykk for r får vi formelen ovenfor. \diamond

Vi kan ut fra dette resultatet enkelt vise åttesirkelteoremet.

Bevis. Åttesirkelteoremet 17

Forholdet mellom fire appoloniussirkler **a**, **b**, **c** og **d** kan skrives som

$$r(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = a + b + c + d$$

De fire andre appoloniussirklene **e**, **f**, **g** og **h** får vi ved inversjon over **r**. Sirkelen **r** forblir den samme mens alle vinklene skifter fortegn slik at

$$r(-\alpha - \beta - \gamma - \delta) = -r(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = e + f + g + h$$

Summen av disse uttrykkene for r er 0. Dette gir

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 0$$

og vi har vist åttesirkelteoremet. ◇

9.3 Sirkelkretser

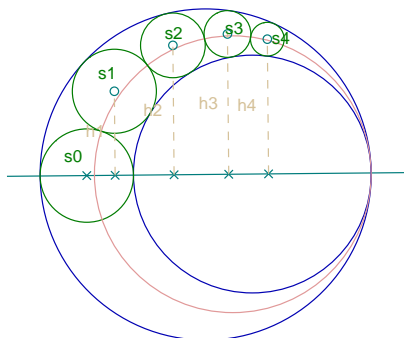
Et område innen sirkelgeometrien som har vært gjenstand for mange undersøkelser er det vi her kaller sirkelkretser. Disse fremkommer ved at vi lar en rekke sirkler tangere to gitte sirkler. Betrakter vi strukturen i forhold til R^3 vil den tilsvare en sirkel i rommet. Særlig interesse har vært knyttet til kretser der sirklene også tangerer hverandre på rekke, og en spesiell variant av disse igjen er sluttede kretser, det vil si at første og siste sirkle i kretsen også tangerer hverandre.

Det er tre typer slike kretser avhengig av hvordan de *begrensende sirklene* ligger i forhold til hverandre. Når de ikke skjærer hverandre kaller vi kretsen elliptisk, og det vil da være et endelig antall *kretssirkler* i kretsen. Når de begrensende sirklene tangerer hverandre har vi en parabolisk krets, og her er antallet sirkler uendelig. Når de begrensende sirklene skjærer hverandre har vi hyperbolske kretser. . Også her er antallet sirkler i kretsen uendelig, men forholdene her skiller seg fra paraboliske kretser.

Mange slags metriske forhold kan studeres i sirkelkretser, men også her er det v-avstanden mellom sirklene som danner fundamentet for forholdene. Ut fra disse forhold viser de andre metriske forholdene seg.

Dette kommer tydelig til syne når vi ser nærmere på et klassisk forhold knyttet til paraboliske kretser.

Setning 59 Vi har en parabolisk krets, og senteret til den første sirkelen s_0 i kretsen ligger på kretsaksen som går gjennom sentrene til de begrensende sirklene.



Høydene h_1, h_2, \dots, h_n fra sentrene til sirklene s_1, s_2, \dots, s_n til aksen, delt på radiene $\acute{s}_1, \acute{s}_2, \dots, \acute{s}_n$ vil da være lik $2n$.

$$\frac{h_n}{\acute{s}_n} = 2n$$

Bevis. Forholdet mellom høyden og radius til en sirkel er det samme som v-avstanden fra sirkelen til linjen. Fra Pappos porism 8.6 har vi sett at differansen mellom v-avstandene til to tangerende sirkler i kretsen er lik 2. Når da v-avstanden mellom første sirkel og linjen er 0, vil den for de neste sirklene stige med 2. Hvis v-avstanden for første sirkel ikke var 0, med v_0 har vi forholdet $v_n = v_0 + 2n$. Spesielt blir v-avstanden lik 1 når den første sirkelen tangerer som gir $v_n = 2n + 1$. \diamond

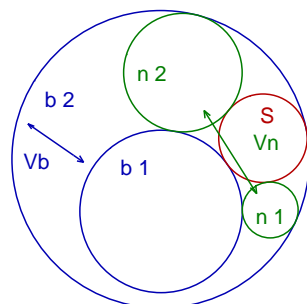
Et annet sentralt forhold gjelder endelige sluttete elliptiske kretser, og dette kan også vises direkte ut fra S-typen.

Setning 60 Sluttete kretser

Vi har en endelig sluttet sirkelkrets. Vi flytter en av sirklene i kretsen, og lar så kretsen dannes på nytt av sirkler som tangerer hverandre på rad. Da vil denne kretsen også være sluttet.

Dette forhold vises som regel ved inversjonsteori. De to begrensende sirklene overføres til to konsentriske sirkler, og ved disse er forholdet opplagt. Vi ser på dette fenomenet ut fra forholdene mellom v-avstandene i kretsen og etablerer først et slikt forhold.

Setning 61 Gitt en elliptisk sirkelkrets med to begrensende sirkler \mathbf{b}_1 og \mathbf{b}_2 , og tre av sirklene i kretsen der den ene er sirkelen \mathbf{s} , og de andre er nabosirklene \mathbf{n}_1 og \mathbf{n}_2 som tangerer \mathbf{s} .



V -avstanden mellom de begrensende sirklene benevner vi v_b , og v -avstanden mellom nabosirkler v_n . Da er relasjonen mellom de to v -avstandene gitt ved

$$v_b v_n - v_b - v_n = 15 \quad (9.6)$$

som også kan skrives som

$$(v_b - 1)(v_n - 1) = 16$$

Bevis. De to begrensende sirklene og de tre sirklene i kretsen danner en struktur på fem sirkler. Alle v -avstandene unntatt v_b og v_n er lik -1 , og vi kan benytte V -typen for å etablere forholdet mellom v_b og v_n . Vi setter inn i determinanten.

$$\begin{array}{c} \mathbf{s} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & v_b & -1 & -1 \\ -1 & v_b & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & v_n \\ -1 & -1 & -1 & v_n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dette gir utregnet

$$(1 - v_b)(1 - v_n)(v_b + v_n - v_b v_n + 15) = 0$$

Her er $v_b = 1$ og $v_n = 1$ trivielle, slik at forholdet mellom de to v -avstandene er gitt ved

$$v_b v_n - v_b - v_n = 15 \quad (9.7)$$

og vi har bevist setningen. \diamond

Har vi altså gitt v -avstanden mellom begrensende sirkler, har vi også v -avstanden mellom to nabosirkler i kretsen. Et moment å bemerke her er at de to v -avstandene er symmetriske. Dette stemmer også med den geometriske situasjonen der vi kan velge nabosirklene til begrensende sirkler, og de begrensende sirklene blir kretssirkler.

Ved den neste setningen skal vi se at alle v -avstander i kretsen er gitt.

Setning 62 *Vi har fire sirkler på rad i en krets. Da er v -avstanden mellom yttersirklene v_y gitt ved v -avstanden mellom nabosirklene*

$$v_y = \frac{1 - 2v_n - v_n^2}{2} \quad (9.8)$$

Bevis. Alle sirklene er ortogonale til samme sirkel, slik at vi kan benytte en redusert V-type for å finne relasjonen mellom v_y og v_n

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & v_n & v_y \\ -1 & 1 & -1 & v_n \\ v_n & -1 & 1 & -1 \\ v_y & v_n & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dette gir utregnet

$$(v_n - 1)^2(v_n^2 + 2v_n + 2v_y - 1) = 0$$

som gir uttrykket over når vil løser med hensyn på v_y ◇

Denne prosess kan vi induktivt bruke videre for å finne alle v -avstander i kretsen. Alle v -avstandene i en krets vil dermed være bestemt av v -avstanden mellom nabosirkler, som igjen er relatert til v -avstanden mellom de begrensende sirklene. Spesielt vil derfor en sluttet krets forbli sluttet fordi v -avstanden mellom alle sirklene er bestemt av de begrensende sirklene.

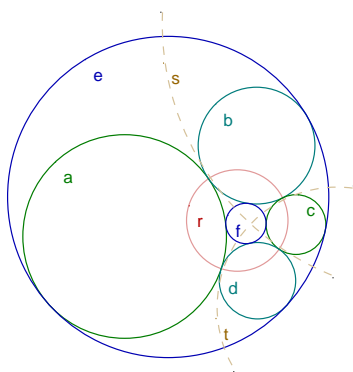
Antallet sirkler i en krets vil også være entydig bestemt av v -avstanden mellom de begrensende sirklene. Noen av disse v -avstandene kan vi finne direkte ut fra et konkret antall, og vi skal se på noen eksempler for å anvende det vi har utviklet generelt.

9.4 Spesielle sirkelkretser

Vi kan betrakte Descartes struktur som den enkleste type sluttet sirkelkrets. Her er det tre kretssirkler, og den innskrevne og omskrevne sirkelen gir de

begrensende sirklene. Når det bare er tre sirkler vil nabosirklene tangere hverandre, slik av $v_n = -1$. Setter vi dette inn i uttrykket for forholdet mellom nabosirkler og begrensende sirkler, og løser dette med hensyn på v-avstanden mellom begrensende sirkler får vi -7 . Dette stemmer overens med det vi fant tidligere.

Setning 63 *I en krets med fire sirkler vil v-avstanden v_n mellom nabosirkler, og v-avstanden v_b mellom de begrensende sirklene og nabosirklene være -3 .*



Bevis. I en krets på fire sirkler vil yttersirklene tangere hverandre og ha v-avstand -1 . Løser vi relasjonene mellom nabosirkler og yttersirkler 9.8 med hensyn på nabosirkler får vi

$$v_n = -1 - \sqrt{2(1 - v_y)} = -1 - \sqrt{4} = -3$$

Relasjonen mellom v_n og v_b 9.7 gir så at også v-avstanden mellom begrensende sirkler er -3 . \diamond

Når vi har funnet v-avstandene i en krets kan vi anvende andre varianter av S-typen for å finne forhold mellom iradiene i kretsene.

Setning 64 *I en firerkrets med sirklene \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} og \mathbf{d} er summen av iradiene til diamentrale sirkler den samme. Irradien r til den ortogonale sirkelen \mathbf{r} til kretsen er i tillegg gitt ved*

$$r^2 = \frac{ac + bd}{2} \tag{9.9}$$

Bevis. Vi benytter den reduserte V-typen slik som over, men erstatter en av sirklene med \mathbf{u} slik at vi får L-typen. V-avstandene er gitt til -1 og -3, og vi kan sette inn i determinanten.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vi regner ut og får

$$a + c = b + d$$

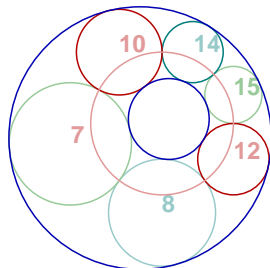
Ortosirkelen får vi ved å anvende Cayley-typen. Vi bruker da tre sirkler i kretsen, og når v-avstandene er gitt kan vi finne den ortogonale sirkelen. Vi får

$$r^2 = \frac{ab + ac + bc - b^2}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{ac + bd}{2}$$

når vi setter $d = a + c - b$. ◇

En sluttet krets med 6 sirkler kalles også Soddys Hexlett fordi han studerte denne.

Setning 65 *I en krets med 6 sirkler er v-avstanden v_n mellom nabosirkler lik -5, og v-avstanden v_y mellom yttersirkler lik -7.*



Bevis. Vi velger ut tre sirkler i kretsen slik at to tangerer hverandre, og den tredje ligger slik at det er en sirkel mellom denne og de to andre. Mellom de tangerende sirklene har vi v-avstand -1, og de andre relasjonene er v_n og v_y . Fra forrige kapittel har vi pytagorasrelasjonen for sirkler som gir $\alpha + \beta = \gamma + 1$ som gir $v_n - 1 = v_y + 1 \Rightarrow v_y = v_n - 2$. Vi har også gitt sammenhengen mellom nabosirkler og yttersirkler ved $v_n = -1 - \sqrt{2(1 - v_y)}$.

Løser vi de to ligningene med hensyn på v_n og v_y får vi $v_n = -5$ og $v_y = -7$ \diamond

Når vi kjenner v-avstanden mellom nabosirkler kan vi blant annet anvede C-typen for å finne ortogonalsirkelen til en sekserkrets. Denne har nesten samme uttrykk som for firerkretsen og er gitt ved.

$$r^2 = \frac{ab + ac + bc - 2b^2}{2}$$

som kan omdannes til en symmetrisk form ved

$$r^2 = \frac{ace + bdf}{\sigma}$$

der a-f er iradiene til sirklene i kretsen og σ er summen av disse iradiene.

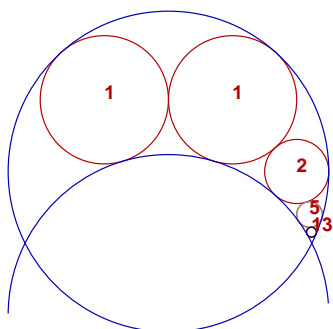
Mange andre forhold finnes også i disse kretsene, for eksempel at summen av iradiene til diamentralt motstående sirkler er konstant

Vi ser også på et forhold i sirkelkretser som er mest slående i forhold til hyperbolske kretser.

Setning 66 *Iradiene til sirklene i en sirkelkrets danner en enkel rekursjonsfølge. Er sirklene i kretsen gitt ved s_n da har vi*

$$s_n = ks_{n-1} - s_{n-2} + l$$

Her kaller vi k kretskonstanten, og denne er knyttet entydig til v-avstandene i kretsen. Et eksempel på dette er at vi kan ha en sirkelkrets der iradiene er annethvert fibonaccitall. Her er $p = 3$ og $q = 0$ og følgen blir $s_n = 3s_{n-1} - s_{n-2}$. Lar vi $s_1 = s_2 = 1$ blir følgen $(1, 1, 2, 5, 13, 34\dots)$



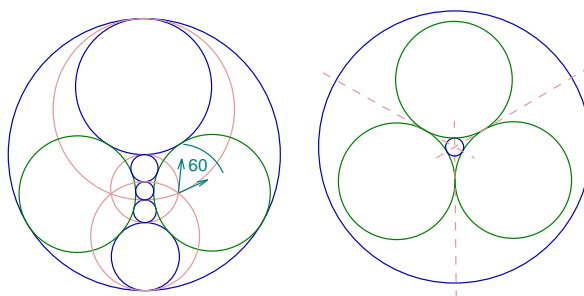
Det er flere måter å begrunne dette på, og vi skal peke på et slikt ved et bestemt forhold i rommet.

9.5 Konjugerte kretser i rommet

I rommet har vi med kulekretser å gjøre i stedet for sirkelkretser. Vi kan danne en kulekrets ved å ta utgangspunkt i tre kuler. Det finnes da en endimensjonal mengde kuler som berører disse tre. Vi kan legge disse på rekke slik som med sirklene, og hvis vi har en sluttet krets kan vi som med sirklene begynne hvor vi vil i kretsen.

De tre kulene vi begynte med kan også legges på rad, og disse vil likeså danne en kulekrets. Denne kan vi kalle den konjugerte kretsen. Et bemerkelsesverdige forhold finnes nå mellom antallet kuler i i den ene kretsen og den konjugerte. Dette forhold ble oppdaget av Jakob Steiner og sier at en delt på antallet kuler i den ene kretsen, pluss en delt på antall kuler i den andre kretsen alltid er lik $\frac{1}{2}$.²

Har vi tre kuler i den ene kretsen vil dette altså gi seks kuler i den andre kretsen fordi $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.



Legger vi altså 3 kuler inntil hverandre, vil det gå akkurat seks kuler i kretsen gjennom disse. Vi kan legge en kule som tangerer de tre, en ny kule oppå denne og så videre. En kule vil da etterhvert ligge omkring de tre utgangskulene, og den sjette kule vil til slutt berøre den første.

Har vi fire kuler i den ene kretsen vil det også gi fire i den andre. Ved andre heltallskretser vil vi få en brøk som uttrykk for den andre kretsen. Dette medfører at vi må gå et visst antall runder før det igjen blir tangering. En femkulekrets vil således gi en konjugert krets med $\frac{10}{3}$ kuler, som betyr at på tre runder vil det være 10 kuler i kretsen.

²Steiner oppdaget setningen og Kolross beviste den, og den kalles derfor ofte Kolross setning.

Vi skal ikke vise dette forholdet helt ut fordi det fører litt langt i denne sammenheng. Vi vil imidlertid gi en sammenheng mellom v-avstandene til nabosirklene til i de to konjugerte kretsene og ut fra dette kan forhold vises for spesielle kretser.

Setning 67 *Gitt to konjugerte kulekretser. Relasjonen mellom v-avstandene u_n i den ene kretsen og v_n i den andre kretsen er da gitt ved*

$$u_n + v_n = -6 \quad (9.10)$$

Bevis. Vi har gitt tre etterfølgende kuler $r_1 - r_3$ i den ene kretsen, og de etterfølgende kulene $s_1 - s_3$ i den andre kretsen. Vi kaller v-avstanden mellom nabosirkler i den ene kretsen for u_n , og i den andre kretsen for v_n . Alle andre enn disse v-avstandene er gitt ved ytre tangering og er dermed lik -1. Vi setter inn i en V-typen for rommet som er en 6×6 determinant.

$$\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \end{array} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 \\ 1 & -1 & u_n & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ u_n & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & v_n \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & v_n & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vi regner ut og får relasjonen $u_n + v_n = -6$ ◇

Denne enkle relasjonen viser direkte forholdene mellom noen konjugerte kretser. En krets på fire sirkler har v-avstand mellom nabosirkler lik -3. Utrykket vi har kommet frem til sier at da må også v-avstanden mellom nabosirkler i den konjugerte kretsen være -3, og følgelig ha fire sirkler. Tre sirkler gir $v_n = -1$ som gir $v_u = -5$ i den konjugerte kretsen, og følgelig har den denne kretsen 6 sirkler.

Vi finner den lineære sammenhengen mellom iradiene til de seks kulene i kretsen ved å erstatte en av sirkelene med punktet \mathbf{u} i uendelig.

Setning 68 *Gitt tre sirkler s_1, s_2 og s_3 på rad i en kulekrets, og tre sirkler r_1, r_2 og r_3 på rad i den konjugerte kretsen. Da er sammenhengen mellom iradiene til sirkelene, og v-avstandene til nabosirkler i en av kretsene gitt ved*

$$(v_n + 3)(r_2 + s_2) = 2(s_1 + s_3 - r_1 - r_3) \quad (9.11)$$

Bevis. Vi erstatter den ene sirkelen i V-typen for seks kuler i rommet med \mathbf{u} , slik at vi får L-typen. Videre setter vi $u_n = -6 - v_n$ og regner ut determinanten og får uttrykket over. ◇

Denne sammenhengen kan også vise at sirkelkretser danner en rekursjonsrekke.

Bevis. Rekursjonsrekke 66

Alle sirkler i planet kan betraktes som kuler i rommet som ligger i samme plan. Gjennom denne kretsen kan vi tenke at vi har en konjugert krets. Sirklene i denne ligger fast, og vi ser på hvordan sirklene i plankretsen er gitt. Vi omdanner uttrykker over 9.11

$$\begin{aligned}(v_n + 3)(r_2 + s_2) &= 2(s_1 + s_3 - r_1 - r_3) \\ \Rightarrow \frac{(v_n + 3)}{2}(r_2 + s_2) &= s_1 + s_3 - r_1 - r_3\end{aligned}$$

Vi setter $\frac{(v_n+3)}{2} = k$ som gir

$$\begin{aligned}k(r_2 + s_2) &= s_1 + s_3 - r_1 - r_3 \\ \Rightarrow s_3 &= k s_2 - s_1 + (r_1 - k r_2 + r_2)\end{aligned}$$

Her er s_3 gitt ved de to foregående sirklene i kretsen og kretskonstanter, som er gitt ved der faste størrelsene nabosirkler, og faste sirkler i den konjugerte kretsen. V har da en annenordens rekursjonsfølge. \diamond

Kretskonstanten k vil for en krets på tre sirkler være -1 , for fire sirkler 0 , og for seks sirkler 1 . Summen av kretskonstantene for to konjugerte kretser er 0 .

Vi går nå over til et annet område med sirkler som grunnelementer, men med en ganske annen karakter.

Kapittel 10

Ikke euklidsk geometri

Vi har sett hvordan de ulike metriske forhold har sin grunn i sirklens forhold til en sirkel eller punkt i uendelig. Her skal vi se hvordan de ikke-euklidske størrelser oppstår i forhold til en vilkårlig sirkel som vi velger som referanse. Dermed vil vi se hvordan hyperbolsk geometri slik den kommer til uttrykk i Poincares diskmodell oppstår naturlig ut fra S-typen.

I systemet med 10 sirkler er det egentlig ikke snakk om euklidsk geometri mer. Den eneste størrelsen vi opererer med her er v -avstanden, og denne er egentlig ikke en euklidsk størrelse. Uten å gå videre inn på det i denne omgang kan vi si at vinkelen er uendret ved konforme avbildninger og gjelder derfor for endringer utover grensene for den euklidske geometri. Når vi derimot betrakter de størrelser som fremkommer ved at vi har en punkt i uendelig befinner vi oss innenfor den euklidske geometri. Hvis vi av systemet på 10 sirkler nå velger et annet element enn punktet i uendelig som en fast referansesirkel da vil andre metriske forhold fremkomme, og vi får ikke-euklidsk geometri. Spesielt vil hyperbolsk geometri oppstå når vi velger en reell ordinær sirkel som referansesirkel. Når et punkt velges som referanse fremkommer parabolisk geometri, og den elliptiske geometrien fremkommer når sirkelen er har imaginær radius.

Her er ikke rom for en systematisk behandling av alle aspektene ved disse geometriene. Vi vil derfor i hovedsak begrense oss til det hyperbolske tilfellet og se hvordan de grunnleggende størrelser fremkommer her ut fra S-typen. Noen videre sammenhenger vil også betraktes slik som de hyperbolske cosinussetningene og uttrykk for innskreven og omskreven sirkel.

10.1 Poincares diskmodell

Vi vil først minne om noen metriske definisjoner og resultater fra hyperbolsk geometri. Selve begrunnelsen for geometrien har sitt utgangspunkt i kongruensrelasjoner, og motivasjonen for de metriske definisjonene følger fra disse. Det er ikke innenfor rammene her å gå videre inn på transformasjonene, men vi viser direkte til de metriske definisjonene.

I Poincares diskmodell har vi gitt en geometri innenfor enhetssirkelen. Her er det særlig linjer som skiller seg fra euklidsk geometri. Disse er nemlig sirkler ortogonale til enhetssirkelen. En linje gjennom to punkter blir således sirkelen gjennom disse punktene som er ortogonal til enhetssirkelen. Vinkelen mellom disse sirklene vil være vinkelen mellom sirklene.

Hyperbolsk avstand mellom to punkter kan defineres på flere måter. En variant er å ta utgangspunkt i punktene representert ved komplekse tall. Da er avstanden $d(z_1, z_2)$ gitt ved

$$\cosh(d(z_1, z_2)) = 1 + \frac{|z_2 - z_1|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \quad (10.1)$$

Slik som i euklidsk geometri kan vi danne trekanter og andre figurer, og vi kan beregne størrelser i forhold til hverandre. Viktige relasjoner i trekantberegninger er blant annet at det ikke bare en, men to cosinussetninger. Også radier til innskrevne og omskrevne sirkler kan beregnes i dette perspektiv.

Vi skal se hvordan hyperbolsk geometri oppstår ut fra S-typen.

10.2 Hyperbolsk geometri ut fra S-typen.

For å danne en hyperbolsk geometri ut fra S-typen lar vi to av sirklene være en dobbel fast sirkel \mathbf{D} være referansesirkel. Denne sirkelen kan godt være enhetssirkelen, men den behøver ikke være det ved betraktningen av generelle forhold. Referansesirkelen danner rammen for et det vi kaller et hyperbolsk plan. Referansesirkelen virker bestemmende inn alle metriske forhold i dette planet.

Radien til en sirkel planet definerer vi da til å være sirkelens v-avstand til \mathbf{D} . Spesielt vil dermed alle sirkler som tangerer referansesirkelen ha radius lik 1 eller -1. Videre vil sirkler som er ortogonale til \mathbf{D} ha radius lik 0, og disse sirklene blir da linjer i dette planet. Denne definisjonen ser vi stemmer overens med den ordinære definisjonen for hyperbolsk geometri.

Punkter vil fortsatt være punkter i det hyperbolske planet. Imidlertid endrer vi et vesentlig aspekt. I stedet for at punktene har relasjonen 1 til sirkelen i uendelig vil de nå ha relasjonen 1 til referansesirkelen. Dette vil virke bestemmende inn på metrikken. Vi kan oppsummere dette med følgende definisjon.

Definisjon 10.1 *Definisjon av hyperbolsk geometri*

1. Vi setter en bestemt sirkel som referansesirkel som vi kaller \mathbf{D} eller D -disken.
2. Sirkler i dette planet er sirkler eller linjer med vinkelaavstand forskjellig fra 0 til D -disken. Radius til disse sirklene er gitt ved v -avstanden til D -disken.
3. Linjer i planet er alle sirkler som er ortogonale til referansesirkel.
4. Punkter forblir punkter, men vi setter v -avstanden fra punktet til D -disken lik 1.

Alle elementene er dermed relatert til \mathbf{D} , og vi ser på konsekvensene av disse definisjonene.

Strukturer som inneholder linjer i tillegg til sirkler vil endre karakter i større grad enn rene sirkelstrukturer. Linjer i hypererbolsk geometri er altså sirkler ortogonale til referansesirkelen, men selv om disse sirklene svarer til linjer, finnes det flere momenter der de skiller seg fra euklidske linjer. Mens to linjer ortogonale til en tredje alltid har v -avstanden pluss minus 1, vil det i D -disken ikke være slik.

Den største endringen i forholdene inntreffer for punktets del, der V -avstanden mellom punktene skifter karakter. V -avstanden fra punktet til D -disken er satt til 1 for at punktet skal være nøytralt i forhold til denne. Vi opprettholder dermed dualiteten mellom linjen og punkter ved at linjen har relasjonen 0 til D -disken og 1 til seg selv, mens dette er omvendt for punktet. Vi skal se på konsekvensene av dette, og spesielt betrakte det i forhold til det ordinære avstandsbegrepet 10.1 i hyperbolsk geometri. Vi betrakter da hvordan avstanden mellom to punkter kommer til uttrykk i ved V -typen.

Setning 69 *Gitt den euklidske v -avstanden $v(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ mellom to punkter \mathbf{P}_1 og \mathbf{P}_2 , og punktendes euklidske v -avstand til en sirkel \mathbf{D} ved $v(\mathbf{P}_1, \mathbf{D})$ og*

$v(\mathbf{P}_2, \mathbf{D})$. Da er den hyperbolske v-avstanden $v_D(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ mellom punktene med hensyn på \mathbf{D} gitt ved

$$v_D(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \frac{v(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)}{v(\mathbf{P}_1, \mathbf{D})v(\mathbf{P}_2, \mathbf{D})} \quad (10.2)$$

Bevis. Vi setter opp determinanten til S-typen der punktenes v-avstander i utgangspunktet er satt opp ut fra ordinær euklidsk definisjon. \mathbf{D} velges som dobbeltelemt, og de to punktene som enkle.

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \mathbf{P}_2 \\ \dots \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{D} & \mathbf{P}_1 & \dots \\ 1 & v(\mathbf{P}_1, \mathbf{D}) & \dots \\ v(\mathbf{P}_2, \mathbf{D}) & v(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right| = 0$$

Ut fra definisjonen har vi gitt at de hyperbolske v-avstandene $v_D(\mathbf{P}_1, \mathbf{D})$ og $v_D(\mathbf{P}_2, \mathbf{D})$ for punkter til \mathbf{D} skal være 1. Vi dividerer derfor med de euklidske v-avstandene i raden og rekken der punktene er og oppnår

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \mathbf{P}_2 \\ \dots \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{D} & \mathbf{P}_1 & \dots \\ 1 & 1 & \dots \\ 1 & \frac{d(P_1, P_2)}{d(P_1, D)d(P_2, D)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right| = 0$$

Den hyperbolske v-avstanden $v_D(P_1, P_2)$ mellom to punkter i disken \mathbf{D} blir altså

$$v_D(P_1, P_2) = \frac{v(P_1, P_2)}{v(P_1, D)v(P_2, D)}$$

og setningen er bevist. ◇

Dermed har det fremkommet et uttrykk som oversetter v-avstand i euklidsk geometri til v-avstand i hyperbolsk geometri med hensyn på en gitt referansesirkel. Videre finnes et konkret uttrykk for denne avstanden når vi velger enhetssirkelen som referansesirkel.

Setning 70 *Gitt to punkter $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$. Da vil deres hyperbolske v-avstand være gitt ved*

$$v_D(P_1, P_2) = \frac{-2((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)}{(1 - x_1^2 - y_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2)} \quad (10.3)$$

og på kompleks form ved

$$v_D(P_1, P_2) = \frac{-2|z_2 - z_1|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \quad (10.4)$$

Bevis. V-avstanden $v(P_1, P_2)$ mellom punktene er gitt ved

$$v(P_1, P_2) = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{-2}$$

Punktene v-avstand til \mathbf{D} er gitt ved punktene potens på sirkelen delt på den negative diameter. Vi kan uttrykke disse potensene $p(P_1, D)$ ved diameter og avstand til origo.

$$\begin{aligned} v(P_1, D) &= \frac{p(P_1, D)}{-2r} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2})(1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2})}{-2} \\ &= \frac{1 - x_1^2 - y_1^2}{-2} \end{aligned}$$

Tilsvarende får vi for P_2 og D

$$v(P_2, D) = \frac{1 - x_2^2 - y_2^2}{-2}$$

Dette uttrykket for de euklidiske v-avstandene settes inn i uttrykket for hyperbolsk v-avstand [10.2](#)

$$\begin{aligned} v_D(P_1, P_2) &= \frac{v(P_1, P_2)}{v(P_1, D)v(P_2, D)} \\ &= \frac{\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{-2}}{\frac{1 - x_1^2 - y_1^2}{-2} \frac{1 - x_2^2 - y_2^2}{-2}} \\ &= \frac{-2((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)}{(1 - x_1^2 - y_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2)} \end{aligned}$$

Skrevet på kompleks form blir dette

$$v_D(P_1, P_2) = \frac{-2|z_2 - z_1|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \quad (10.5)$$

og forholdet er bevist. ◇

Dette resultatet er langt på vei det samme som den ordinære definisjon av hyperbolsk avstand 10.1. Vi kan dermed sette opp.

Setning 71 Den hyperbolske v-avstanden $v_D(P_1, P_2)$ mellom to punkter P_1 og P_2 i enhetsdisken er gitt ved

$$v_D(P_1, P_2) = 1 - \text{Cosh}(d_{P_1 P_2}) \quad (10.6)$$

Bevis. Dette ser vi umiddelbart ut fra den ordinære definisjon 10.1 og relasjonen 10.5 vi har kommet frem til. ◇

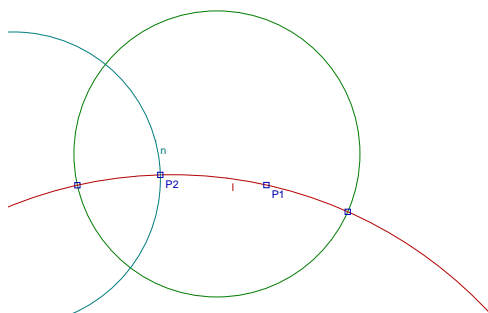
Vi har dermed etablert en forbindelse mellom den ordinære hyperbolske avstanden og v-avstanden mellom to punkter. Imidlertid vil flere v-avstander endre karakter i den hyperbolske geometrien, og disse må også bestemmes før vi finner mer komplekse forhold. Videre finnes et uttrykk for den hyperbolske v-avstanden fra et punkt til en linje.

Setning 72 Gitt et punkt P_1 og en linje n i disken D . Da kan den hyperbolske høyden $v_D(P, n)$ uttrykkes ved v-avstanden $v_D(P_1, P_2)$ fra P_1 til normalpunktet P_2 fra P_1 til n ved

$$v_D(P_1, n)^2 = (1 - v_D(P_1, P_2))^2 - 1 \quad (10.7)$$

og i forhold til enhetssirkelen ved

$$v_D(P_1, n) = \text{Sinh}(d(P_1, P_2)) \quad (10.8)$$



Bevis. Vi setter disken D en linje l , to punkter P og Q på denne linjen, og en linje n normalt på linjen l i punktet Q . Her er alle v-avstandene trivielle

bortsett fra høyden fra \mathbf{P} til \mathbf{n} , og v-avstanden \mathbf{P} og \mathbf{Q} . Vi setter forholdene in i determinanten til V-typen.

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \mathbf{l} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \mathbf{l} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{l} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{n} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{P} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{P} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & v_{Pn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_{PQ} \\ 1 & 0 & v_{Pn} & v_{PQ} & 0 \end{array} \right| = 0$$

Utregnet blir dette

$$2v_{PQ} - v_{PQ}^2 + v_{Pn}^2 = 0$$

Som kan skrives som

$$v_{Pn}^2 = (1 - v_{PQ})^2 - 1$$

Første del av setningen er da oppnådd. Videre gjelder

$$v_{PQ} = 1 - \cosh(d_{PQ})$$

og dette innsatt i uttrykket over sammen med relasjonen $\sinh^2 = \cosh^2 - 1$ gir den andre delen av setningen.

$$\begin{aligned} v_{Pn}^2 &= \cosh(d_{PQ})^2 - 1 = \sinh(d_{PQ})^2 \\ \Rightarrow v_{Pn} &= \sinh(d_{PQ}) \end{aligned}$$

◇

Vi har dermed oppnådd at også den hyperbolske høyden kan forbindes med et elementært hyperbolsk uttrykk.

Den siste elementære relasjonen vi skal se på er den hyperbolske v-avstanden mellom to linjer som er ortogonal på en tredje. Denne er alltid ± 1 i det euklidske tilfellet, men dette blir annerledes her.

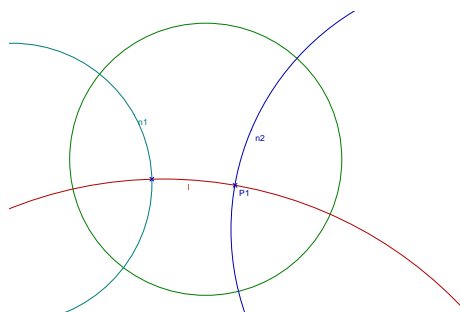
Setning 73 *To linjer \mathbf{n}_1 og \mathbf{n}_2 er ortogonal på en tredje linje \mathbf{l} , og fotpunktene på denne er \mathbf{P} og \mathbf{Q} . Den hyperbolske v-avstanden $v_D(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ mellom normalene er da gitt ved*

$$v_{n_1 n_2} = 1 - v_{PQ} \tag{10.9}$$

og i enhetsdisken

$$v_{n_1 n_2} = \cosh(d_{PQ}) \tag{10.10}$$

Bevis. Vi setter opp en struktur med en hyperbolsk linje l , og to hyperbolske linjer \mathbf{n}_1 og \mathbf{n}_2 normalt på denne. Vi setter så \mathbf{P} og \mathbf{P}_2 som skjæringspunktene mellom l og \mathbf{n}_1 og \mathbf{n}_2 . I V-typen tar vi imidlertid ikke med punktet \mathbf{P}_2 , vi trenger bare dette som referanse.



Med \mathbf{D} og de resterende elementene har vi fem elementer i strukturen. Vi har to størrelser utenom de trivielle nemlig vinkelavstanden v mellom de ortogonale linjene, og høyden h fra punktet \mathbf{P}_1 til linjen \mathbf{n}_2 . Vi setter inn i determinanten og får en relasjon.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{D} \quad \mathbf{l} \quad \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{P} \\
 \mathbf{D} \\
 \mathbf{l} \\
 \mathbf{n}_1 \\
 \mathbf{n}_2 \\
 \mathbf{P}
 \end{array}
 \begin{vmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & v_{n_1 n_2} & v_{P n_1} \\
 0 & 0 & v_{n_1 n_2} & 1 & 0 \\
 1 & 0 & v_{P n_1} & 0 & 0
 \end{vmatrix}
 = 0$$

Utregnet får vi

$$v_{n_1 n_2}^2 = 1 + v_{P n_1}^2 \quad (10.11)$$

Dermed er v-avstanden mellom de ortogonale linjene relatert med høyden fra et punkt til en linje. Denne høyden har vi tidligere relatert med avstanden mellom to punkter ved

$$v_{P n_1}^2 = (1 - v_{PQ})^2 - 1$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
 v_{n_1 n_2}^2 &= 1 + (1 - v_{PQ})^2 - 1 = (1 - v_{PQ})^2 \\
 \Rightarrow v_{n_1 n_2} &= 1 - v_{PQ}
 \end{aligned}$$

Tidligere så vi at for enhets sirkelen er $1 - v_{PQ}$ lik $\cosh(d_{PQ})$ slik at

$$v_{n_1 n_2} = \cosh(d_{PQ})$$

og vi har vist setningen. ◇

Forholdene i enhetsdisken kan oppsummeres ved

$$v_D(P, Q) = 1 - \cosh(d_{PQ}) \quad (10.12)$$

$$v_D(P, l) = \sinh(d_{PQ}) \quad (10.13)$$

$$v_D(n_1, n_2) = \cosh(d_{PQ}) \quad (10.14)$$

Som tidligere vil v -avstandene mellom sirkler og linjer være cosinus til vinkelen mellom dem.

De ulike v -avstandene kan nå anvendes sammen med S-typen til å finne relasjoner i trekanter.

10.3 Trekanter i hyperbolsk geometri

Ved de ulike v -avstandene kan mer sammensatte problem betraktes ut fra S-typen, og vi ser først på de hyperbolske cosinussetningene.

Den første cosinussetningen lar seg bevise ut fra eksakt samme geometriske struktur som i det euklidske tilfellet 7.5. Determinanten endrer imidlertid også her karakter ved at $D_{1,1} = 1$.

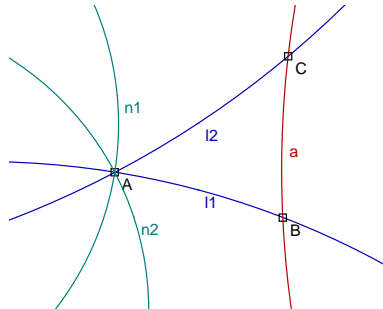
Setning 74 Første hyperbolske cosinussetning *Gitt en hyperbolsk trekant ABC i enhetsdisken. Da er den hyperbolske avstanden d_{BC} mellom B og C gitt ved*

$$\cosh(d_{BC}) = \cosh(d_{AB}) \cosh(d_{AC}) - \sinh(d_{AB}) \sinh(d_{AC}) \cos \theta \quad (10.15)$$

der θ er vinkelen mellom AB og AC .

Bevis. Trekanten med hjørnene **A**, **B** og **C**, linjen AB kalt l_1 og linjen AC

kalt \mathbf{l}_2 er gitt.



(10.16)

I tillegg legger vi gjennom A normalen \mathbf{n}_1 til \mathbf{l}_1 og normalen \mathbf{n}_2 til \mathbf{l}_2 . Referansesirkelen betegner vi \mathbf{D} . D er jo dobbeltelement, og vi lar også \mathbf{A} være et dobbeltelement. Vi velger videre \mathbf{B} , \mathbf{l}_2 og \mathbf{n}_2 i H-gruppen, og \mathbf{C} , \mathbf{l}_1 og \mathbf{n}_1 i V-gruppen. Vinkelen θ mellom \mathbf{l}_1 og \mathbf{l}_2 er lik vinkelen mellom \mathbf{n}_1 og \mathbf{n}_2 , mens vinkelen mellom \mathbf{l}_1 og \mathbf{n}_2 , og mellom \mathbf{l}_2 og \mathbf{n}_1 er lik $\theta + \pi$. Vi setter inn de ulike verdiene i determinanten.

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{n}_1 \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{D} \quad \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{l}_2 \quad \mathbf{n}_2 \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & v_{AB} & 0 & 0 \\ 1 & v_{AC} & v_{BC} & 0 & v_{Cn_2} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & v_{Bn_1} & \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

Regner vi ut dette med hensyn på v_{BC} får vi

$$v_{BC} = v_{AB} + v_{AC} - v_{AB}v_{AC} + \frac{v_{Bn_1}v_{Cn_1} \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow v_{BC} = v_{AB} + v_{AC} - v_{AB}v_{AC} + v_{Bn_1}v_{Cn_1}$$

Dette uttrykket skiller seg fra det ordinære cosinusuttrykket 7.5 bare ved faktoren $-v_{AB}v_{AC}$.

Vi omformer dette til hyperbolske forhold

$$\begin{aligned} v_{BC} &= = = v_{AB} + v_{AC} - v_{AB}v_{AC} + v_{Bn_1}v_{Cn_1} \cos \theta \\ \Rightarrow 1 - v_{BC} &= 1 - v_{AB} - v_{AC} + v_{AB}v_{AC} - v_{Bn_1}v_{Cn_1} \cos \theta \\ \Rightarrow (1 - v_{BC}) &= (1 - v_{AB})(1 - v_{AC}) - v_{Bn_1}v_{Cn_1} \cos \theta \\ \Rightarrow \cosh(d_{BC}) &= \cosh(d_{AB}) \cosh(d_{AC}) - \sinh(d_{AB}) \sinh(d_{AC}) \cos \theta \end{aligned}$$

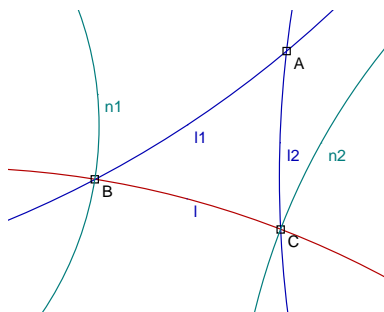
◇

På lignende vis finner vi også den andre cosinussetningen. Som nevnt skiller hyperbolsk geometri seg fra euklidisk ved at en trekant også er bestemt ved de tre vinklene. Ved den andre cosinussetningen kan vi finne en side når de tre vinklene er kjent.

Setning 75 Andre hyperbolske cosinussetning Gitt en hyperbolsk trekant med vinkler α , β og γ og den motstående siden til α er gitt ved den hyperbolske avstanden θ . Da gjelder

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cosh \theta \quad (10.17)$$

Bevis. Trekanten med hjørnene **A**, **B**, **C** med linjen **l** gjennom **B** og **C**, linjen **l**₁ gjennom **A** og **B**, og linjen **l**₂ gjennom **A** og **C** er gitt. Videre settes normalen **n**₁ til **l** gjennom **B**, og normalen **n**₂ til **l** gjennom **C**.



Vi velger elementene **D**, **l**, **l**₂, **n**₁ og **B** i H-gruppen, og **D**, **l**, **l**₁, **n**₂ og **C** i V-gruppen. Her er v-avstandene mellom linjene er gitt ved cosinus til vinklene, v-avstandene mellom linjer og normaler er lik henholdsvis pluss og minus sinus til vinklene i tilhørende hjørner. Videre er v-avstanden mellom punktene gitt ved $1 - \cosh \theta$, v-avstanden mellom normalene ved $\cosh \theta$ og v-avstandene mellom normalene og punktene lik $\sinh \theta$. Vi setter inn i determinanten

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \mathbf{l} \\ \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{C} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{D} \quad \mathbf{l} \quad \mathbf{l}_2 \quad \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{B} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \cos \alpha & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & \sin \gamma & \cosh \theta & -\sinh \theta \\ 1 & 0 & 0 & \sinh \theta & 1 - \cosh \theta \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

Utregnet gir dette

$$(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)(\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta) - \sin \beta \sin \gamma \cosh \theta = 0$$

Her er $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ slik at vi får

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cosh \theta$$

og vi har vist setningen. ◇

10.4 Sirkler i hyperbolsk geometri

Rene sirkelstrukturer endrer ikke så mye karakter ved i \mathbf{D} -planet. En vesentlig forskjell forekommer likevel når det gjelder sammenhenger mellom radier som i dette tilfellet er v-avstanden til \mathbf{D} . Dette kommer av at \mathbf{D} har relasjonen 1 til seg selv, mens elementet \mathbf{u} i uendelig har relasjonen 0 til seg selv. Dette betyr at verdien av elementet $Det_{1,1} = 1$ i determinanten blir 1, og relasjonene mellom radiene vil se noe annerledes ut. Utrykket for Descartes konfigurasjon blir da.

Setning 76 *Gitt fire sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} og \mathbf{d} i det hyperbolske planet. Relasjonen mellom de fire hyperbolske radiene er da gitt ved*

$$(a + b + c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4 \quad (10.18)$$

Bevis. Dette finner vi rett frem ved å anvendene C-typen slik som i vi gjorde tidligere 5.3, og regne ut. Vi må imidlertid sette verdien 1 i $Det_{1,1}$. ◇

Tilsvarende finner vi et uttrykk for ortogonalsirkelen til tre tangerende sirkler.

Setning 77 *Gitt tre hyperbolske sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} som gjensidig tangerer hverandre, og en sirkel \mathbf{r} som er ortogonal til disse. Da er relasjonen mellom disse gitt ved*

$$r^2 = ab + ac + bc + 1 \quad (10.19)$$

Bevis. Vi setter inn i C-typen og løser uttrykket med hensyn på r . ◇

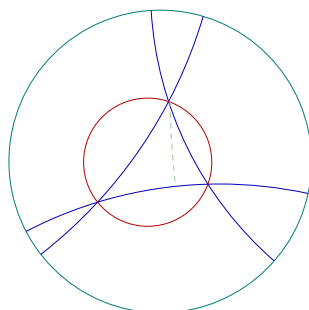
Vi ser at disse uttrykkene skiller seg noe fra de euklidske tilfellene, og et viktig moment er at de ikke lengre er homogene.

De lineære relasjonene mellom iradier som gjelder i den euklidske geometri vil derimot ikke endre seg noe om de blir relatert til et annet element enn elementet u i uendelig. Dette kommer av at her er ikke basiselementets forhold til seg selv med i uttrykkene, slik at det ikke spiller noen rolle om dette er punkt eller linjer.

Problemstillingene med omskrevne og innskrevne sirkler vil imidlertid endre karakter på lignende måte som den hyperbolske cosinussetningen. Disse finner vi på samme måte som i det euklidske tilfellet, men vi har her å gjøre med hyperbolske lengder. Et interessant moment i disse betraktningen er en viss dualitet som vi finner i uttrykkene som ikke er tilstede på samme måte i euklidsk geometri.¹ Et annet moment er at det oppstår uttrykk som ligner på flatebegrepet fra Herons formel, men som skiller seg fra Gauss-Bonnets formel.

Først finnes et uttrykk for den omskrevne sirkelen.

Setning 78 *Gitt en hyperbolsk disken D , tre punkter A , B og C og sirkelen r gjennom punktene.*



V -avstanden mellom A og B setter vi til c , og tilsvarende for de andre punktene. Da er den hyperbolske radien til sirkelen gitt ved v -avstandene mellom punktene ved

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc + 2abc}}{\sqrt{abc}} \quad (10.20)$$

¹Wilson går gjennom disse temaene på sitt nettsted

Bevis. Disken D , de tre punktene og sirkelen gir fem elementer, og vi kan bruke V -typen for å finne relasjonen mellom v -avstandene her. Setter vi inn størrelsene i determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & r & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & b \\ 1 & 0 & a & 0 & c \\ 1 & 0 & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Determinanten skiller seg fra det euklidske tilfellet bare ved at $Det_{1,1} = 1$. Vi regner ut og får uttrykket

$$r^2 abc - a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 2abc = 0$$

Utregnet med hensyn på r får vi det søkte resultatet. \diamond

Vi har dermed et uttrykk for radius til den omskrevne sirkelen gitt ved sidene i trekanten.

I betraktningen over den omskrevne sirkelen i det euklidske tilfellet fant vi radius uttrykt ved arealet og sider. Dette kan vi også gjøre her, men det krever at vi utvikler et uttrykk for høyden til trekanten. Dette gjør vi helt tilsvarende det euklidske tilfellet.

Setning 79 *Gitt en disk D , tre punkter A , B og C og linjen l gjennom punktene A og B . Da er v -avstanden h fra C til AB gitt ved*

$$h = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc + 2abc}}{\sqrt{a(2-a)}} \quad (10.21)$$

Bevis. Disken D , de tre punktene og linjer gir i alt fem elementer, og vi kan anvende V -typen. Vi setter inn størrelsene i determinanten og regner ut og oppnår

$$2h^2 a - h^2 a^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 2abc = 0$$

Uttrykker vi dette med hensyn på h får vi det søkte resultat. \diamond

Vi ser at uttrykkene i telleren er det samme i begge uttrykkene. Det har lignende karakter som arealet, og vi kaller det pseudoareal og kaller det Δ til

trekanten. Om vi erstatter (a, b, c) med (x^2, y^2, z^2) , og lar verdiene bli små nærmer vi oss verdiene for det euklidske tilfellet. Vi kan derfor betrakte

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc + 2abc}$$

som en type generalisering av arealet til trekanten. Dette er ikke er det samme som Gauss-Bonnet arealet, men i algebraiske sammenhenger knyttet til avstander mellom punkter spiller denne størrelsen samme rolle som arealet.

Nærmere studie av nevneren i uttrykket til høyden viser at denne kan omformes til $\sinh(d_{AB})$.

$$\sqrt{a(a-2)} = \sqrt{(1-a)^2 - 1} = \sqrt{\cosh^2(d_{AB}) - 1} = \sinh \alpha$$

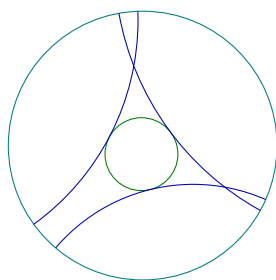
Dermed kan vi sette opp enkle uttrykk som ligner på de euklidske tilfellene.

$$\Delta = h \sinh(d_{AB}) \tag{10.22}$$

$$r = \frac{\Delta}{\sqrt{2abc}} \tag{10.23}$$

At en trekant også er bestemt ved sine vinkler gjør at vi også kan finne den innskrevne sirkelen til denne trekanten.

Setning 80 *Gitt tre linjer \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} i D -disken, og den innskrevne sirkelen r til de tre linjene. V -avstanden mellom \mathbf{a} og \mathbf{b} setter vi til γ og tilsvarende for de andre linjene. Vi kan da uttrykke radien til den innskrevne sirkelen ved*



$$r = \frac{\sqrt{2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma - 1}}$$

Bevis. $v(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \gamma$, $v(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \beta$ og $v(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha$ og setter inn i determinanten.

$$\begin{array}{c} \mathbf{d} \quad \mathbf{r} \quad \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & r & 0 & 0 & 0 \\ r & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & \gamma \\ 0 & -1 & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinantregning gir

$$r^2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \alpha & \beta \\ -1 & \alpha & 1 & \gamma \\ -1 & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & 1 & \gamma \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}}$$

Utregnet med hensyn på r får vi

$$r = \frac{\sqrt{2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma - 1}}$$

◇

På tilsvarende vis kan vi finne et uttrykk for høyden fra et punkt til en linje uttrykt ved vinklene mellom linjene.

Setning 81 *Gitt tre linjer \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} i D -disken, og skjæringspunktet \mathbf{P} mellom \mathbf{b} og \mathbf{c} . V -avstanden fra P til \mathbf{a} kaller vi h , og denne kan da uttrykkes ved v -avstandene mellom linjene ved*

$$h = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma - 1}}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

Bevis. Fem elementer er gitt og ved anvendelse av V -typen oppstår uttrykket over. ◇

Også her får vi en størrelse som er felles for uttrykkene for radius og høyde, og dette er et pseudoareal knyttet til vinkler.

$$\Phi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma - 1}$$

Videre kan nevneren omformes i uttrykket for høyden $\sin \theta_\alpha = \sqrt{1 - \alpha^2}$. Dette gir

$$\Phi = h \sin \theta_\alpha \tag{10.24}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\Phi}{\sqrt{2(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)}} \tag{10.25}$$

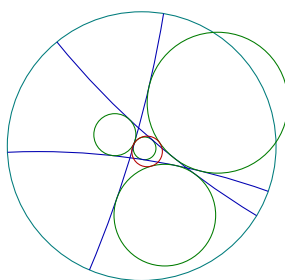
Erstatter vi v-avstanden med $1 - \cosh(d)$ i uttrykkene knyttet til omskrevne trekner [10.23](#) ser vi at uttrykkene for radier og høyder for omskrevne og innskrevne trekner langt på vei er duale.

Til slutt ser vi på et forhold som ikke gjelder i det euklidske tilfellet, nemlig relasjonen mellom nipunktsirkelen og fire innskrevne sirkler.

Setning 82 *Gitt en hyperbolsk trekant, og de fire innskrevne sirklene til denne. Da er radien til nipunktsirkelen gitt ved 4 delt på differansen mellom den midterste sirkelen og de andre innskrevne sirklene.*

$$n = \frac{4}{a - b - c - d} \tag{10.26}$$

Bevis. Poincaredisken \mathbf{D} , tre hyperbolske linjer \mathbf{k} , \mathbf{l} og \mathbf{m} , fire innskrevne sirkler \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} og \mathbf{d} er gitt i tillegg til nipunktsirkelen \mathbf{n} .



Disken og de fire innskrevne sirklene danner H-gruppen, og disken, de tre linjene og nipunktsirkelen V-gruppen. Relasjonen finnes ved å anvende den

generelle S-typen.

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{l} \\ \mathbf{m} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{D} \quad \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{d} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & a & b & c & d \\ n & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

Utregnet gir dette

$$n(a - b - c - d) - 4 = 0$$

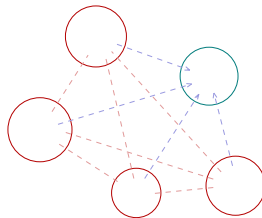
som kan omdannes til setningen over. \diamond

Med dette er det vist at S-typen også kan ligge til grunn for den ikke-euklidske geometrien, og kan forklare mange forhold i denne. Vi går nå over til studiet av koordinatsystem ut fra S-typen.

Kapittel 11

Dannelse av koordinater

Den euklidske geometrien og de ikke euklidske geometriene kan forstås ut fra et system av 10 sirkler ved at en dobbel sirkel holdes fast og de andre sirklene har referanse til denne. Vi skal nå vende om på dette. I stedet for å holde en sirkel fast og la de andre variere vil vi nå holde fire doble sirkler fast og la de andre variere i forhold til disse. Da vil de fire sirklene danne et naturlig koordinatsystem for en femte sirkelen. V-avstandene fra de fire sirklene til den femte vil være koordinatene til denne sirkelen. Ved dette vil vi se at mange forhold knyttet til koordinatsystem kan betraktes med utgangspunkt i S-typen.



(11.1)

I utgangspunktet kan vi legge de faste sirklene hvor vi vil, når de ligger fast vil de ha fire relasjoner til den femte. Det lønner seg imidlertid å legge de fire på bestemte måter slik at relasjonene sirklene imellom blir minst mulig. Dette kan gjøres på flere vis. Vi skal først se på hvordan den alminnelige algebraiske ligning for en sirkel i koordinatsystemet kan forstås i lys av dette.

11.1 Sirkelligningen

Som kjent kan vi skrive ligningen for en sirkel ved uttrykket $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. For ulike verdier av a , b og c vil vi da få ulike sirkler. Vi sier da at (a, b, c) danner koordinatene til en gitt sirkel \mathbf{s} og vi kaller systemet for abc -koordinater til en sirkel. Vi kan da skrive

$$abc(\mathbf{s}) = (a, b, c)$$

Størrelsene (a, b, c) kan enkelt settes i forbindelse med senter og radius til sirkelen, som vi kaller xyr -koordinatene til en sirkel. Ligningen for en sirkel kan nemlig også gies på formen $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r^2$ der (x_1, y_1) er senteret og r er radien til sirkelen. Dette fremgår av pytagoras setning. Vi kan da finne verdiene a , b og c uttrykt ved (x, y, r) ved

$$abc(\mathbf{s}) = (a, b, c) = (-2x_1, -2y_1, r^2 - x^2 - y^2)$$

Disse koordinatene er egnede til å beskrive mange sider ved sirklene. Blant annet vil en lineær kombinasjon av abc -koordinatene til to sirkler gi en sirkelbunt.

Vi skal nå se at vi kan endre dette koordinatsystemet noe, og koordinatene som da fremkommer vil da kunne knyttets til v -avstander. Vi kan omdanne abc -koordinater til homogene koordinater ved å legge til en koordinat -2 . Vi kaller dette systemet S_3 -koordinater til sirkler og skriver

$$S_3(\mathbf{s}) = (a, b, c, -2) = (-2x, -2y, r^2 - x^2 - y^2, -2)$$

Siden dette er homogene koordinater kan vi multiplisere og dividere med samme tall. Vi dividerer koordinatene med $-2r$ og får

$$S_3(\mathbf{s}) = \left(\frac{a}{-2r}, \frac{b}{-2r}, \frac{c}{-2r}, \frac{1}{r} \right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{x^2 + y^2 - r^2}{2r}, \frac{1}{r} \right) \quad (11.2)$$

Studerer vi nærmere de størrelsene som er fremkommet ser vi at $\frac{x}{r}$ og $\frac{y}{r}$ er en sirkels v -avstand til henholdsvis x -aksen og y -aksen. Videre vet vi at iradien $\frac{1}{r}$ kan betraktes som v -avstanden fra sirkelen til elementet \mathbf{u} i uendelig. Til slutt kan vi bli klar over at uttrykket $\frac{x^2 + y^2 - r^2}{2r}$ er v -avstanden fra sirkelen til origo. De fire koordinatene blir dermed uttrykk for sirkelens v -avstander til fire faste elementer. Elementet i uendelig, origo, x -aksen og y -aksen danner dermed basiselementene for sirkler som blir uttrykt i S_3 -koordinater.

11.2 V-avstanden ved koordinater

Vi har nå oppnådd å omdanne koordinatsystemet slik at det nå utgår fra v-avstander mellom sirkler. Sirkler er dermed basiselementene i systemet, og v-avstander relasjonene deres til basiselementene. Dermed kan vi se på ulike situasjoner i koordinatsystemet ut fra S-typen.

I det kartesiske koordinatsystemet finner vi avstanden mellom to punkter ut fra deres koordinater. Vi skal her se at vi kan finne v-avstanden mellom to sirkler i S_3 -koordinatsystemet.

Setning 83 *Gitt to sirkler ved deres S_3 koordianter ved $S_3(\mathbf{s}_1) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ og $S_3(\mathbf{s}_2) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$. Da er v-avstanden mellom sirklene gitt ved*

$$v_{12} = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1 \quad (11.3)$$

og uttrykket ved abc-koordianter

$$\Rightarrow v_{12} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 - 2c_1 - 2c_2}{4r_1r_2} \quad (11.4)$$

Bevis. Koordinatene her er v-avstandene fra sirklene til basiselementene. X-aksen har v-avstandene 0 til de andre elementene, og 1 til seg selv. Det samme gjelder y-aksen. Origo har vinkelavstand 1 til elementet i uendelig, og 0 til seg selv. Dette gjelder visa versa. Vi kan da sette opp determinanten til en modifisert V-type der basiselementene er doble, mens de to sirklene hører til hver sin gruppe.

$$\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ x \\ y \\ o \\ \infty \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ o \\ \infty \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ o \\ \infty \end{array} \begin{array}{c} o \\ \infty \end{array} \begin{array}{c} \infty \end{array} \left| \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{array} \right| = 0$$

Utregnet gir dette

$$v_{12} = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1 \quad (11.5)$$

Setter vi inn uttrykkene for definisjonene ovenfor oppnår vi uttrykket i abc-koordianter.

$$\begin{aligned}
v_{12} &= \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1 \\
&= \frac{a_1}{-2r_1} \frac{a_1}{-2r_2} + \frac{b_1}{-2r_1} \frac{b_1}{-2r_2} + \frac{c_1}{-2r_1} \frac{1}{r_2} + \frac{c_2}{-2r_2} \frac{1}{r_1} \\
&= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 - 2c_1 - 2c_2}{4r_1r_2}
\end{aligned}$$

og sammenhengen er vist. \diamond

Vi får dermed et enkelt uttrykk for v-avstanden mellom to sirkler gitt ved S_3 -koordinater som enkelt overføres til abc koordinater.

En spesiell variant av uttrykket har vi når to sirkler er ortogonale til hverandre. Geometrisk forstått er dette vilkåret for at et sirkelpunkt ligger i et sirkelplan.

Corrolar 11.1 *Gitt to sirkler med S_3 -koordinater $S_3(\mathbf{s}_1) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ og $S_3(\mathbf{s}_2) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$. Da er sirklene ortogonale når*

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1 = 0$$

som ved abc – koordinatere blir

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 2(c_1 + c_2)$$

Bevis. V-avstanden blir 0 ved ortogonalitet. \diamond

En annen spesiell variant får vi når sirkelen blir lik seg selv. Det oppstår da en relasjon mellom koordinatene til en og samme sirkel.

Corrolar 11.2 *Gitt en s sirkel med S_3 -koordinater $S_3(\mathbf{s}) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Da er relasjonen mellom koordinatene gitt ved*

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma\delta = 1 \tag{11.6}$$

Bevis. Når en sirkel faller sammen med en annen blir v-avstanden lik 1. \diamond

En slik forbindelse mellom koordinatene er naturlig når fire koordinater bestemmer en tredimensjonal mengde.

11.3 Koordinater til linjer og punkter

Når en linje eller et punkt er gitt i dette koordinatsystemet, vil disse også kunne bestemmes ved dets v-avstander til basiselementene. En linjes v-avstander til basiselementene vil være cosinus til x-aksen og cosinus til y-aksen, avstanden fra linjen til origo, og 0 som er v-avstande mellom linjen og elementet i uendelig. En linje gitt ved ligningen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ vil da være gitt ved

$$S_3(\mathbf{l}) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right) \quad (11.7)$$

Videre vil et punkts koordinater være bestemt av dets v-avstander til basiselementene.

$$S_3(\mathbf{P}) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(y, x, \frac{x^2 + y^2}{-2}, 1 \right) \quad (11.8)$$

V-avstandene mellom ulike elementer vil være gitt på samme måte som v-avstanden mellom to sirkler. Potensforholdet fra et punkt til en sirkel vil da være gitt ved

$$p(s, P) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1$$

Utrykker vi dette i abc-koordinater får vi

$$\begin{aligned} p(s, P) &= \frac{a}{-2r}x + \frac{b}{-2r}y - \frac{1}{r} \frac{x^2 + y^2}{-2}y + \frac{c}{-2r} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + ax + by + c}{-2r} \end{aligned}$$

Utrykket er den opprinnelige sirkelligningen delt på $-2r$. Nå er potensforholdet lik potensen fra et punkt til en sirkel delt på $-2r$. Dermed er uttrykket $x^2 + y^2 + ax + by + c$ over brøkstreken uttrykk for potensen fra et punkt $P=(x,y)$ til en sirkel (a,b,c) . Når punktet ligger på sirkelen blir potensen 0, og dermed blir $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ som jo er sirkelligningen.

Vi skal vise et forhold til som lar seg bestemme ut fra S_3 koordinater.

11.4 Sirkelplan

En sirkel som er ortogonal til en annen kan betraktes som et punkt i et plan i S_3 . Hva er betingelsen for at fire sirkler ligger i samme plan, altså at de er ortogonale til samme sirkel? Dette fremkommer ved anvendelse av den S-typen

Setning 84 *Gitt fire sirkeler $s_1 - s_4$ som alle er ortogonale til samme sirkel. Forholdet mellom abc-koordinatene kan da skrives på determinantform ved*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (11.9)$$

Bevis. Sirkelen s som alle er ortogonal til lar vi være et dobbeltelement. De fire ortogonale sirklene danner sammen med s H-gruppen, mens basiselementene danner V-gruppen. Vi setter inn i determinanten, og på grunn av at fire sirkler er ortogonale til en femte kan vi redusere til en 4×4 determinant. Denne gir

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = 0$$

Vi skriver ut med a,b,c koordinater og får

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{-2r_1} & \frac{b_1}{-2r_1} & \frac{c_1}{-2r_1} & \frac{1}{r_1} \\ \frac{a_2}{-2r_2} & \frac{b_2}{-2r_2} & \frac{c_2}{-2r_2} & \frac{1}{r_2} \\ \frac{a_3}{-2r_3} & \frac{b_3}{-2r_3} & \frac{c_3}{-2r_3} & \frac{1}{r_3} \\ \frac{a_4}{-2r_4} & \frac{b_4}{-2r_4} & \frac{c_4}{-2r_4} & \frac{1}{r_4} \end{vmatrix} = 0$$

Vi multipliserer radene med -2 ganger radien som forekommer i raden, og dividerer til slutt fjerde kolonne med -2 og vi kommer frem til determinanten over. \diamond

Vi vil nå gå over til et enda mer symmetrisk koordinatsystem, og vil vise disse forholdene her.

Kapittel 12

Sirkelkoordinater

Vi skal nå se på et helt symmetrisk koordinatsystem for sirkler. Dette systemet dannes også ut fra S-typen, men etterhvert vil vi definere systemet uavhengig av denne. Ut fra dette koordinatsystemet dannes et vektorrom, og skalarproduktet eller indreproduktet i dette vektorrommet vil vise seg å være v -avstanden. Dermed utdypes forståelsen av v -avstand som en grunnleggende størrelse. Systemet vil også gi et elementært bevis for fundamentalsetningen for S-typen. Mange problemstillinger knyttet til sirkler kan ved dette løses ved koordinater og standard lineær algebra.

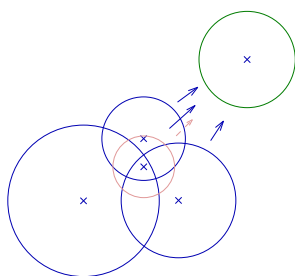
12.1 Ortogonalt koordinatsystem

Forholdene for S_3 -koordinater blir noe usymmetrisk fordi basiselementene her er to punkter og to linjer. V -avstandene linjene imellom og deres v -avstand til punktene er 0, men v -avstanden mellom punktene er 1. På den annen side har linjer v -avstand 1 til seg selv mens punktene har 0. Ved dette får vi enkel uttrykk mellom basiselementene, men uttrykkene blir noe usymmetriske.

Nå velges fire gjensidig ortogonale sirkler som basissirkler i koordinatsystemet. Dette fører til alle v -avstandene dem imellom bli lik 0, og alle elementene har v -avstand 1 til seg selv. Nå kommer det bemerkelsesverdige oss i møte at vi ikke bare kan ha tre, men hele fire sirkler som alle er ortogonale til hverandre. Dette har vi sett på i ligning 5.7. Her har riktignok den ene sirkelen imaginær radius, noe som medfører at den ene koordinaten blir imaginær. Dette vil imidlertid ikke føre til større vanskeligheter som vi vil se etterhvert.

Vi ser nå på en sirkel i dette koordinatsystemet. V-avstandene fra en sirkelen til de fire basissirkelene vil nå være koordinatene til denne sirkelen.

Definisjon 12.1 Gitt fire sirkler $\mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta, \mathbf{b}_\gamma$ og \mathbf{b}_δ som alle er ortogonale til hverandre. Disse sier vi danner basisen i et sirkelkoordinat-system som vi kaller S_4 eller S hvis det ikke kan misforståes. En sirkel i dette systemet bestemmes ved de fire v-avstandene denne sirkelen danner med basisvektorene, og vi kaller disse størrelsene koordinatene til sirkelene i dette systemet.



$$S(\mathbf{s}) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \quad (12.1)$$

Vi kaller slike koordinater for *sirkelkoordinater*¹ til en sirkel. Vi skal foreløpig ikke bestemme disse koordinatelementene nærmere ved xyr-koordinater, men først se på ulike forhold ut fra S-typen.

Det første vi ser på også her er hvordan to sirkler i koordinatsystemet er relatert til hverandre ut fra slike sirkelkoordinater. Dette finner vi ved å anvende S-typen.

Setning 85 Gitt fire basissirkelene $\mathbf{b}_\alpha - \mathbf{b}_\delta$, og to sirkler \mathbf{s}_1 og \mathbf{s}_2 med koordinater $S(\mathbf{s}_1) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ og $S(\mathbf{s}_2) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ i forhold til disse. Da er v-avstanden $v_{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2}$ mellom de to sirkelene \mathbf{s}_1 og \mathbf{s}_2 gitt ved

$$v_{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2} = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 \quad (12.2)$$

¹Det ble etterhvert klart at denne type koordinater er blitt kalt tetrasykelkoordinater (For forhold i rommet - pentasfærekoordinater)[5](49). Her blir imidlertid punktene først bestemt i koordinatsystemet og andre elementer ut fra disse, mens vi definerer sirkler direkte. Vi har derfor valgt å beholde navnet sirkelkoordinater i denne fremstillingen.

Bevis. Vi anvender en modifisert V-type der basiselementene er doble, men der de to sirklene hører til hver sin gruppe. Basiselementene er ortogonale til de andre basiselementene, og har dermed v-avstand 0 til disse. V-avstandene mellom basiselementene og sirklene s_1 og s_2 er gitt ved koordinatene. Vi setter inn i determinanten.

$$\begin{array}{c} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{b}_\alpha \\ \mathbf{b}_\beta \\ \mathbf{b}_\gamma \\ \mathbf{b}_\delta \end{array} \begin{vmatrix} \mathbf{s}_2 & \mathbf{b}_\alpha & \mathbf{b}_\beta & \mathbf{b}_\gamma & \mathbf{b}_\delta \\ v_{1,2} & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vi regner ut og får

$$v_{s_1, s_2} = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2$$

og forholdet er bevist. \diamond

Ved dette er gitt et uttrykk for v-avstanden mellom to sirkler ut fra deres koordinater til fire basiselement. Utrykker ligner mye på det vi oppnådde i forrige kapittel. Den eneste forskjeller er at her er symmetri ved at her multipliseres en koordinat for en sirkel med den samme koordinat for den andre sirkelen, mens dette var snudd om i de to siste leddene tidligere.

Ved nærmere betraktning viser dette seg å være skalarproduktet til $S(\mathbf{s}_1)$ og $S(\mathbf{s}_2)$ oppfattet som vektorer. Dette er et fundamentalt resultat. V-avstand kan altså betraktes som standard indreprodukt eller skalarprodukt til to vektorer. Vi øyner ved dette grunnen til at v-avstanden spiller så stor rolle i sirkelgeometrien, den ser ut til å være indreproduktet i et vektorrom. Vi vil kalle vektorene *sirkelvektorer* eller kort *S-vektorer*.

En spesiell variant av resultatet over har vi ved ortogonalitet.

Corrolar 12.1 *Gitt to sirkler s_1 og s_2 . Da er sirklene ortogonale til hverandre hvis skalarproduktet mellom sirkelvektorene er lik 0.*

$$S(\mathbf{s}_1) \cdot S(\mathbf{s}_2) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 = 0$$

Bevis. V-avstanden ved ortogonalitet er 0, og vi får resultatet over. \diamond

Videre kan vi la de to sirklene falle sammen til en.

Corrolar 12.2 *Kvadratsummen til de fire sirkelkoordinatene for en gitt sirkel er lik 1.*

$$S(\mathbf{s}) \cdot S(\mathbf{s}) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$$

Bevis. Koordinatene blir de samme og v-avstanden blir 1, og vi får resultatet over. \diamond

Av dette resultat kan vi se at vi har å gjøre med normerte vektorer. Et annet moment er at vi av dette kan bestemme en fjerde koordinat når de tre andre er gitt. De fire koordinatene bestemmer dermed en tredimensjonal mengde.

Vi kunne nå utviklet flere sammenhenger knyttet til dette koordinatsystemet ut fra S-typen. Vi betenker imidlertid at determinanten til S-typen foreløpig er hypotetisk, og at den ennå ikke bevist den for det generelle tilfellet. Vi skal derfor gjøre en vending. Vi vil nå definere sirkelkoordinater ut fra sirkelens (x,y,r) koordinater. Dermed kommer frem til samme resultatene så og si nedenfra, og vi vil kunne vise hvordan sirkler er assosiert med et 4-dimensjonalt vektorrom.

12.2 Standard koordinatsystem

For å bestemme sirkelkoordinater til en sirkel ut fra xyr-koordinater må vi først bestemme oss for en standard basis for S-koordinatene. Vi velger da x-aksen og y-aksen som to av koordinatelementene. Disse er ortogonale til hverandre. Som det tredje element velger vi enhetssirkelen. Denne er jo ortogonal til både x-aksen og y-aksen. Som det fjerde element setter vi den imaginære enhetssirkelen. Dette er en sirkel med senter i origo med radius i . Denne er ortogonal med de tre øvrige. Dette kan vi overbevise oss om ved å sette sirkelen inn i uttrykket for vinkelavstand, som da må bli 0.

Lemma 12.1 *Den imaginære enhetssirkelen med senter i origo er ortogonal til x-aksen, y-aksen og enhetssirkelen.*

Bevis. De to første tilfellene innser vi enkelt ved å registrere at høyden fra senteret for den imaginære sirkelen til aksene er 0, følgelig er vinkelavstanden 0. At den imaginære enhetssirkelen er ortogonal med den reelle ser vi når vi setter inn i uttrykket for vinkelavstand $v = \frac{r_1^2 + r_2^2 - a^2}{2r_1 r_2}$. Avstanden mellom sentrene til sirklene er 0, og vi får uttrykket $v = \frac{1^2 + i^2}{2i} = 0$. Dermed er forholdene

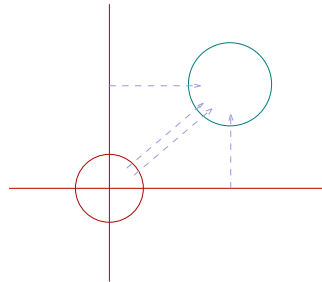
bevist. ◇

Vi legger en sirkel i dette koordinatsystemet, og den har da en v -avstand til hver av basissirklene.

Definisjon 12.2 Standard sirkelkoordinater. De fire sirkelementene x -aksen, y -aksen, enhets sirkelen og den imaginære enhets sirkelen er de fire basiselementene $b_1 - b_4$ i et standard koordinatsystem. Koordinatene $S(\mathbf{s})$ til et element \mathbf{s} i koordinatsystemet er gitt ved v -avstandene fra dette elementet til de fire basiselementene.

$$S(\mathbf{s}) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (v_{b_1, \mathbf{s}}, v_{b_2, \mathbf{s}}, v_{b_3, \mathbf{s}}, v_{b_4, \mathbf{s}}) \quad (12.3)$$

og vi sier at $S(\mathbf{s})$ er sirkelvektoren til sirkelen s .



Dette systemet kommer også Daniel Pedoe [4] frem til.² Vi går nå videre til å uttrykke S -koordinatene ved x,y -koordinater. Vi går da ut fra bestemmelsen av v -avstander 6.9, og vi vil først ta for oss ordinære sirkler.

Setning 86 Sirkelkoordinater for ordinære sirkler. Gitt en ordinær sirkel s ved x,y -koordinater. Denne sirkelen vil da ha S -koordinater $S(\mathbf{s}) =$

²D. Pedoe kommer frem til disse koordinatene ved å betrakte en avbildning i forhold til en omdreingsparaboloide. Han anvender så disse koordinatene til å bevise Descartes setning.

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ gitt ved

$$S(\mathbf{s}) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = f(x, y, r) = \left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{r^2 + 1 - x^2 - y^2}{2r}, \frac{r^2 - 1 - x^2 - y^2}{2i r} \right)^3 \quad (12.4)$$

Bevis. Vi viser dette ved å sette inn uttrykkene for v-avstander og forenkle.
◇

Et vesentlig moment ved disse koordinatene er at radiens fortegn også blir ivaretatt ved at alle koordinatene skifter fortegn når radien blir negativ. Dette skiller seg fra abc-koordinater der kvadratet av radien inngår i uttrykket. Fortegnet blir også bevart ved den omvendte funksjon.

Setning 87 Fra S til xyr Vi går fra S-koordinatene til xyr-koordinater ved

$$(x, y, r) = g(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{\alpha}{\gamma - i\delta}, \frac{\beta}{\gamma - i\delta}, \frac{1}{\gamma - i\delta} \right) \quad (12.5)$$

Bevis. Vi løser uttrykkene for S-koordinater med hensyn på x, y og r og får resultatet over. ◇

Her er uttrykket $\gamma - i\delta$ iradien til sirkelen. Når denne blir 0 har vi med en linje å gjøre.

S-koordinater for linjer finner vi på akkurat samme måte ved at vi bestemmer linjens v-avstander til de fire basiselementene. Når vi skal bestemme denne linjen må vi først ha den gitt i det kartesiske koordinatsystemet. Det er flere måter å uttrykke en linje på i dette systemet. Vi kan gjøre dette med ligningene $y = ax + b$ eller $ax + by = 1$. Imidlertid er ikke alle linjer definert ved disse ligningene. Vi får heller ikke angitt retningen ved disse ligningene. Vi går derfor ut fra to punkter når vi vil finne sirkelkoordinatene til en linje. Når punktene ikke faller sammen vil de bestemme en linje entydig. Vi kan også bestemme retningen ut fra rekkefølgen til punktene.

³ Sirkelen $(3, 5, 1)$ uttrykkes i sirkelkoordinater ved

$$S(\mathbf{s}) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{5}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1 - 3^2 - 5^2 + 1^2}{2}, \frac{-1 - 3^2 - 5^2 + 1^2}{2i} \right) = (5, 3, -16, 17i)$$

Setning 88 *Sirkelkoordinater for linjer* Vi har gitt en linje l gjennom punktene $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$. Linjens sirkelkoordinater er da gitt ved

$$\begin{aligned} S(l) &= (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = f(p_1, p_2) = f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &= \left(\frac{y_1 - y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}, \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}, \frac{i(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right) \end{aligned}$$

Bevis. Linjens koordinater er gitt ved dens v-avstandene til basiselementene, og vi må da finne uttrykk for disse ved de xy-koordinatene til de to punktene. For x-aksen og y-aksens vedkommende er dette cosinus til vinkelen som linjen skjærer aksene med. Når vi setter $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ og $\mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$ er disse gitt ved

$$\alpha = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

$$\beta = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

Vinkelavstanden i forhold til enhets sirkelen blir linjens avstand til origo delt på 2 ganger radien til enhets sirkelen. Denne radien er jo 1, slik at vinkelavstanden er linjens halve avstand fra origo. V-avstanden til den imaginære enhets sirkelen blir den samme, men delt på $2i$. \diamond

Helt tilsvarende finner vi også punktenes S-koordinater ut fra v-avstandene til basiselementene.

Setning 89 *Sirkelkoordinater for punkter*. Gitt et punkt gitt ved $P = (x, y)$. Punktets sirkelkoordinater er da gitt ved

$$S(\mathbf{P}) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = P_4(x, y) = \left(x, y, \frac{1 - x^2 - y^2}{2}, \frac{i(1 + x^2 + y^2)}{2} \right) \quad (12.6)$$

Bevis. De fire koordinatene er punktets v-avstander til basiselementene. \diamond

Punktene skiller seg fra ordinære sirkler og linjer i et vesentlig henseende ved at kvadratsummen av koordinatene her blir 0, og ikke 1 som for de andre

elementene.⁴ Dette følger direkte av at v-avstanden et punkt har til seg selv er 0 i motsetning til punkter og linjer der denne er 1. Vi kan imidlertid også vise det i forhold til standard koordinater.

Setning 90 *Gitt et punkt med sirkelkoordinater $S(P) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Da er kvadratsummen av koordiantene lik 0.*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 0$$

Bevis. Vi setter inn uttrykkene for standardkoordinatene, og oppnår resultatet. \diamond

Vi skal nå se at v-avstanden mellom sirkler ut fra koordinatene er den samme som den vi har definert opprinnelig.

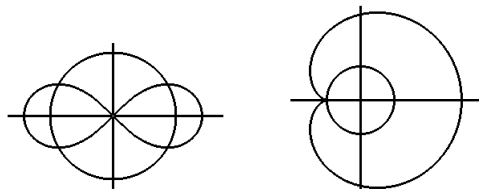
12.3 Relasjoner ut fra S-koordinater

Ut fra S-typen kunne det vises at skalarproduktet mellom to sirkelvektorer gir v-avstanden mellom disse. Det samme resultat oppstår ut fra S-koordinater.

Setning 91 *Gitt to sirkler \mathbf{s}_1 og \mathbf{s}_2 ved sirkelkoordinater $S(\mathbf{s}_1) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ og $S(\mathbf{s}_2) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$. Da er vinkelavstanden v mellom de to gitt ved skalarproduktet til de to sirkelvektorene*

$$v(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2 \quad (12.7)$$

⁴I alminnelighet er det punkter som blir angitt i sirkelkoordinater. Disse kalles da for planet tetrasykelkoordinater og for rommet pentasfærekoordinater. Disse ble oppdaget av Darboux, og han brukte dem til å beskrive flater i rommet. Mange uttrykk for kurver og flater blir enkle i slike koordinater. For eksempel er uttrykket for lemnisskaten



$(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ gitt ved $\alpha^2+\gamma^2 = \frac{1}{4}$, og cardioiden $(x^2+y^2-1)^2 = 4(x^2+2x+y^2+1)$ er gitt ved $\gamma^2 = 2\alpha + i\delta$

Bevis. De to sirklene gies ved koordinatene

$$S(\mathbf{s}_1) = \left(\frac{x_1}{r_1}, \frac{y_1}{r_1}, \frac{r_1^2 + 1 - x_1^2 - y_1^2}{2r_1}, \frac{r_1^2 - 1 - x_1^2 - y_1^2}{2i r_1} \right)$$

$$S(\mathbf{s}_2) = \left(\frac{x_2}{r_2}, \frac{y_2}{r_2}, \frac{r_2^2 + 1 - x_2^2 - y_2^2}{2r_2}, \frac{r_2^2 - 1 - x_2^2 - y_2^2}{2i r_2} \right)$$

Dette gir

$$\begin{aligned} v(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) &= \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 \\ &= \frac{x_1 x_2}{r_1 r_2} + \frac{y_1 y_2}{r_1 r_2} + \frac{(r_1^2 + 1 - x_1^2 - y_1^2)(r_2^2 + 1 - x_2^2 - y_2^2)}{2r_1 2r_2} \\ &\quad + \frac{(r_1^2 - 1 - x_1^2 - y_1^2)(r_2^2 - 1 - x_2^2 - y_2^2)}{2i r_1 2i r_2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} \end{aligned}$$

Utrykket vi har kommet frem til er definisjonen for v-avstanden mellom to sirkler, og vi har dermed vist antagelsen. \diamond

På samme måte kan vi vise at skalarproduktet som også involverer punkter og linjer gir de ulike v-avstandene mellom elementene. Disse gies også ut fra S-typen som vi straks skal vise, så vi begrenser oss i her til å vise at skalarproduktet mellom to punktvektor og mellom en punktvektor og en linjevektor er lik v-avstanden mellom disse.

Setning 92 *V-avstanden mellom to punkter P_1 og P_2 er gitt ved skalarproduktet til deres punktvektorer.*

$$v_{P_1 P_2} = S(p_1) \cdot S(p_2) = \frac{a^2}{-2}$$

der a er den euklidske avstanden mellom punktene.

Bevis. Vi setter

$$S(P_1) = \left(x_1, y_1, \frac{1 - x_1^2 - y_1^2}{2}, \frac{i(1 + x_1^2 + y_1^2)}{2} \right)$$

$$S(P_2) = \left(x_2, y_2, \frac{1 - x_2^2 - y_2^2}{2}, \frac{i(1 + x_2^2 + y_2^2)}{2} \right)$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
 v_{P_1P_2} &= S(p_1) \cdot S(p_2) \\
 &= \left(x_1, y_1, \frac{1-x_1^2-y_1^2}{2}, \frac{i(1+x_1^2+y_1^2)}{2}\right) \cdot \left(x_2, y_2, \frac{1-x_2^2-y_2^2}{2}, \frac{i(1+x_2^2+y_2^2)}{2}\right) \\
 &= x_1x_2 + y_1y_2 + \frac{1-x_1^2-y_1^2}{2} \frac{1-x_2^2-y_2^2}{2} + \frac{i(1+x_1^2+y_1^2)}{2} \frac{i(1+x_2^2+y_2^2)}{2} \\
 &= \frac{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}{-2} = \frac{a^2}{-2}
 \end{aligned}$$

og påstanden er bevist. \diamond

For linje og punkt går vi frem på samme måte.

Setning 93 Gitt et punkt $S(P) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ og en linje $S(l) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ gitt ved . Da er v-avstanden mellom dem gitt ved skalarproduktet mellom vektorene.

$$v_{Pl} = S(P) \cdot S(l) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2$$

Bevis. Punktet gies ved $p = S(x, y)$, og vi begrenser oss her til linjer av typen $l = L(P_1, P_2) = L(a, 0, 0, b)$. Vi har da sirkelkoordinatene for punktet og linjen ved

$$\begin{aligned}
 p &= \left(x, y, \frac{1-x^2-y^2}{2}, \frac{i(1+x^2+y^2)}{2}\right) \\
 l &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{iab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)
 \end{aligned}$$

Skalarproduktet av disse blir

$$\begin{aligned}
 v_{p,l} = p \cdot l &= \frac{xa}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{yb}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{(1-x^2-y^2)ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} - \frac{(1+x^2+y^2)ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} \\
 v_{p,l} &= \frac{bx+ay-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}
 \end{aligned}$$

Vi har dermed kommet frem til et uttrykk for v-avstanden fra et punkt til en linje, og dette er v-avstanden mellom disse elementene. \diamond

Spesielt blir v-avstanden 0 når punktet ligger på linjen, som betyr at $bx + ay - ab$ må være 0, og det er nettopp uttrykket for linjen.

Dermed er vi kommet frem til et enhetlig vektorsystem for det euklidske planet med grunnelementer sirkel, linjer og punkter. Alle mål mellom disse objektene er gitt som skalarproduktene mellom deres vektorer, og disse målene blir her som tidligere varianter over v-avstandene mellom elementene.⁵

12.4 Definisjon av sirkelvektorer

Før vi setter opp en formell definisjon av vektorsystemet er det noen elementer vi må se på litt først. Dette dreier seg særlig om et element som vi ikke får fatt i på vanlig vis, nemlig punktet \mathbf{u} i uendelig.

Som vi har sett tidligere så danner punktet \mathbf{u} i uendelig grunnlaget for en euklidsk metrikk. Hvordan er dette punktet bestemt ved S-koordinater? Vi vet at linjer har v-avstand 0 til dette punktet, og det henger sammen med at linjer har invers radius 0. Ved den omvendte funksjonen så vi at iradien er gitt ved $\gamma - i \delta$ i S-koordinater. Dette uttrykket er altså 0 for linjer.

Vi finner nå punktet \mathbf{u} ved $S(\mathbf{u}) = (0, 0, 1, -i)$. Denne vektoren gir nemlig $\gamma - i \delta$ ved skalarproduktet med en sirkelvektor $S(\mathbf{s}) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Dette uttrykket er iradien til sirkelen, og det blir 0 for en linje som stemmer overens med virkningen av \mathbf{u} slik vi tidligere har sett. I vektorsystemet kan vi altså definere linjer som de elementene som har skalarprodukt 0 til \vec{u} .

Finner vi skalarproduktet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}$ mellom $\mathbf{u} = (0, 0, 1, -i)$ og en generell punktvektor $\mathbf{p} = (x, y, \frac{1-x^2-y^2}{2}, \frac{i(1+x^2+y^2)}{2})$ blir dette lik $\frac{1-x^2-y^2}{2} - i \frac{i(1+x^2+y^2)}{2} = 1$. Dette stemmer overens med hvordan vi tidligere har betraktet punktet med hensyn på \mathbf{u} . Dermed er punktet \mathbf{u} bestemt entydig, og er også konsistent med tidligere behandlinger av dette punktet.

⁵I nyere tid er denne typen koordinater tatt opp igjen innenfor geometrisk algebra. Her kalles koordiantene konforme koordinater, og de utvikles fra ordinære homogene koordinater med det som kalles "conformal split". [2] Et ordinært koordinatsystem med vektorer $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ gjøres først homogent ved $(\mathbf{x}, 1)$. Så foretas den såkalte konforme deling ved at ettallet deles i to ved $(\frac{1}{2} - \frac{\mathbf{x}^2}{2}, \frac{i}{2} + \frac{i(\mathbf{x}^2)}{2})$ slik at vektorene blir seende ut

$$(\mathbf{x}, \frac{1}{2} - \frac{\mathbf{x}^2}{2}, \frac{i}{2} + \frac{i\mathbf{x}^2}{2})$$

Dette er det samme som punktvektorene vi har kommet frem til når det gjelder planet. Det påpekes at fordelene med slike vektorer er at euklidske avstander dermed kan behandles som skalarprodukter.

Disse betraktningene gjør også at vi finner en elementær overgang til de ikke-euklidske geometrier ved S-vektorer. Vi kan sette en hvilken som helst sirkel D som et bestemmende element, og si at linjer er de elementer som har skalarprodukt 0 med denne vektoren. Vi sier videre at punktenes skalarprodukt til denne vektoren skal være 1 slik vi tidligere satte v -avstanden mellom punkter og en disk D lik 1. Slik vi har definert punktvektorer er imidlertid skalarproduktet mellom disse og u lik 1. Vi omdanner derfor punktvektoren ved å dele på dennes skalarprodukt med diskvektoren D . Den vektoren som nå fremkommer vil ha skalarprodukt 1 med D .

Vi har nå funnet vektoruttrykk for alle elementene i sirkelgeometrien, og kan sette opp en formell definisjon av koordinatsystemet og vektorrommet.

Definisjon 12.3 *Sirkelvektorer*

Sirkelvektorer *Sirkler i planet kan assosieres med vektorer i et firedimensjonalt komplekst vektorrom med sirkelvektorer $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. I det generelle tilfellet er vektorene også assosiert med sirkler med kompleks radius og senter. I denne fremstillingen behandler vi bare ordinære sirkler. Disse forekommer når tre av koordinatene er reelle og den fjerde imaginær, eller visa versa. Av ordinære sirkler har vi reelle sirkler som har reelt senter og radius, og imaginære sirkler med reelt senter og rent imaginær radius.*

Homogene vektor *Detter er et homogent vektorrom der vi kan multiplisere og dividere elementene med positive kvadratroten av et reelt tall.*

$$\vec{s} = (k\alpha, k\beta, k\gamma, k\delta), k = \sqrt{t}, t \in R.$$

Norm *Den positive kvadratroten til kvadratsummen av koordinatene kaller vi normen til vektoren*

$$|\vec{s}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} \quad (12.8)$$

Normert vektor *Vektoren delt på normen kalles en normert vektor. Til hver slik vektor svarer en sirkel i planet. Den normerte vektorens elementer gir sirkelens v -avstander til et koordinatsystems basiselementer som er fire sirkler som alle er ortogonale til hverandre. I et slikt basis-system er tre sirkler reelle og en imaginær eller visa versa.*

Standard koordinatsystem Vi kaller det standard koordinatsystem når de fire ortogonale sirklene er x -aksen og y -aksen, enhets sirkelen og den imaginære enhets sirkelen. I dette koordinatsystemet er en sirkel $P=(x,y,r)$ gitt ved

$$(x, y, r) = g(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{\alpha}{\gamma - i\delta}, \frac{\beta}{\gamma - i\delta}, \frac{1}{\gamma - i\delta} \right) \quad (12.9)$$

Punkter Når normen til en sirkelvektor blir 0, kaller vi sirkelvektoren en punktvektor. $P \subset S$. Til hver slik punktvektor er det assosiert et punkt i planet. Dette punktets (x,y) koordinater er gitt ved v -avstandene til y -aksen og x -aksen i punktvektoren.

Skalering av punkter Punkter kan ikke normeres fordi normen er 0. Vi skalerer punktet mot en bestemt sirkelvektor \vec{D} , og setter $\vec{D} \cdot \vec{S} = 1$. Den bestemmende vektoren \vec{D} danner legger grunnen for en metrikk der punkter inngår.

Radius sirkel Skalarproduktet mellom \vec{D} og en ordinær sirkelvektor kaller vi radien til sirkelen i dette systemet.

Linje En sirkelvektor som er ortogonal til den bestemmende vektoren kaller vi en linjevektor. $L \cdot \vec{D} = 0$

Vinkelavstand Skalarproduktet til to normerte vektorer kaller vi v -avstanden mellom vektorene.

Punktet i uendelig Et bestemt element er vektoren $\vec{u} = (0, 0, 1, -i)$. Denne representerer punktet \mathbf{u} i uendelig. Velges denne til skaleringsvektor har vi den euklidske geometri. Ordinære linjer har skalarprodukt 0 mot denne. Skalarproduktet mellom denne og andre normerte sirkelvektorer er den inverse radien til sirkelen. $r(S) = S \cdot \vec{U}$

Ved dette har vi kunnet knytte sirkler til et standard vektorrom. Sirkler kan da behandles med apparatet til lineær algebra på lik linje med for eksempel projektiv geometri.

Ved at vi har funnet de grunnleggende egenskaper for sirkelkoordinater kan vi nå anvende dette på ulike problemstillinger. Vi viser først fundamentaldeterminanten ut fra dette. Dette determinantforholdet gjelder generelt for vektorer med standard indreprodukt.

12.5 Bevis for fundamentaldeterminanten

Ved etableringen av sirkelvektorene er vi i stand til å bevise fundamentaldeterminanten på en elementær måte. I stedet for å sette v-avstanden mellom to sirkler i determinanten kan vi nå sette opp skalarproduktet til vektorene. Determinanten får da en noe annen form, og vi kan uttrykke fundamentalsetningen noe annerledes.

Setning 94 *Gitt 10 sirkler fordelt i to grupper på fem hver. Sirklene i den ene gruppen kaller vi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ og \mathbf{e} , og sirklene i den andre gruppen for $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ og \mathbf{o} . De tilhørende sirkelvektorene kaller vi $\vec{a} - \vec{e}$ og $\vec{k} - \vec{o}$. Vi har da en relasjon mellom skalarproduktene som dannes mellom sirkler i den ene gruppen og sirkler i den andre.*

$$\begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{k} & \vec{a} \cdot \vec{l} & \vec{a} \cdot \vec{m} & \vec{a} \cdot \vec{n} & \vec{a} \cdot \vec{o} \\ \vec{b} \cdot \vec{k} & \vec{b} \cdot \vec{l} & \vec{b} \cdot \vec{m} & \vec{b} \cdot \vec{n} & \vec{b} \cdot \vec{o} \\ \vec{c} \cdot \vec{k} & \vec{c} \cdot \vec{l} & \vec{c} \cdot \vec{m} & \vec{c} \cdot \vec{n} & \vec{c} \cdot \vec{o} \\ \vec{d} \cdot \vec{k} & \vec{d} \cdot \vec{l} & \vec{d} \cdot \vec{m} & \vec{d} \cdot \vec{n} & \vec{d} \cdot \vec{o} \\ \vec{e} \cdot \vec{k} & \vec{e} \cdot \vec{l} & \vec{e} \cdot \vec{m} & \vec{e} \cdot \vec{n} & \vec{e} \cdot \vec{o} \end{vmatrix} = 0 \quad (12.10)$$

Bevis: De enkelte vektorene er firedimensjonale og gitt ved $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ og så videre. Vi skriver ut vektorene i to matriser som vi multipliserer med hverandre.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 & l_1 & m_1 & n_1 & o_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 & n_2 & o_2 \\ k_3 & l_3 & m_3 & n_3 & o_3 \\ k_4 & l_4 & m_4 & n_4 & o_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.11)$$

Ved matrisemultiplikasjon gies $M_{1,1}$ ved å multiplisere første rad i den ene matrisen med første kolonne i neste. Dette gir $a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4$ som er lik $\vec{a} \cdot \vec{k}$. Dette er det samme som leddet øverst til høyre i fundamentaldeterminanten, og vi ser lett at alle leddene i produktmatrisen vil svare til leddene i determinanten. Videre er en av kolonnene i den ene matrisen er lik 0, og determinanten blir lik 0. Determinanten til produktmatrisen blir dermed også lik 0, og vi har vist setningen over. \diamond

Dette resultatet er et generelt resultat for vektorer og gjelder ikke bare for sirkler. Forholdene kan også uten videre utvides til høyere dimensjoner.

Vi har ved dette vist at determinanten til S-typen er 0, og alle resultater fra tidligere som bygger på denne er nå ikke lenger bare hypotetiske.

Kapittel 13

Anvedelser av Sirkelvektorer

Ved at vi har kommet frem til sirkelvektorer og bevist fundamentalteoremet har vi på en viss måte kommet til en avslutning av våre betraktninger. Her var formålet å finne en overordnet måte å forstå de ulike sirkelteoremene på. Dette er oppnådd ved at vi har kommet frem til fundamentaldeterminanten og funnet et elementært bevis for denne. Vi skal imidlertid gå litt inn på anvendelsen av sirkelkoordinater og sirkelvektorer fordi disse hører naturlig sammen med determinanten. Noen av problemstillingene vi berørte innledningsvis slik som heltallkonfigurasjoner lar seg også først forstå ved at vi går inn på konkrete vektorer ut fra standard koordinater. Vi skal også se at vektorregningen naturlig fører til determinanten hører med til hele bildet.

Vi vil ikke systematisk gå gjennom hvordan S-koordinatene og S-vektorer kan anvendes, men vi vil bare peke på enkelte områder.

13.1 Løsning av insidensproblemeer

Mens vi tidligere fant sammenhenger mellom iradier til sirklene kan vi ved vektorene bestemme de ulike geometriske elementene fullstendig. Det er to forskjellige metoder vi kan anvende til dette. Ved den ene metoden ser vi på hver enkelt koordinat for seg ut fra S-typen, og ved den andre metoden ser vi på ligningsystemer. Vi skal betrakte problemet med å finne en sirkel som er ortogonal til tre andre i lys av dette. Dette er en sentral problemstilling, og kan oppfattes som å skjæringspunktet mellom tre plan, eller planet gjennom tre gitte punkter.

Oppgave 13.1 *Gitt tre sirkler ved tre sirkelvektorer \vec{s}_1 , \vec{s}_2 og \vec{s}_3 . Vi skal*

finne \vec{s} som er ortogonal til disse tre.

Metode 1

Vi ser på de tre sirklene $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3$, \mathbf{s} og en av koordinatene \mathbf{b} som fem elementer som vi kan se på ved V-typen. V-avstandene mellom $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3$ er gitt ved skalarproduktet til deres vektorer, v-avstandene fra disse til \mathbf{s} er 0, deres v-avstand til \mathbf{b} er gitt ved akkurat denne koordinaten, og v-avstand mellom \mathbf{s} og \mathbf{b} er koordinaten til \mathbf{s} som vi søker. Vi setter da opp determinanten til V-typen og løser med hensyn på $v_{s,b}$ og finner koordinaten. Gjentar vi prosessen vil vi få de fire koordinatene. \diamond

Metode 2

Siden sirkelen er ortogonal til de tre sirklene blir skalarproduktet til disse lik 0. Normen til sirkelen er i tillegg 1 slik at vi får fire ligninger.

$$I \quad \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s} = 0, II \quad \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s} = 0, III \quad \mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{s} = 0, IV \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1 \quad (13.1)$$

Skrevet ut blir får vi ligningene

$$\begin{aligned} I & \quad \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma + \delta_1\delta = 0 \\ II & \quad \alpha_2\alpha + \beta_2\beta + \gamma_2\gamma + \delta_2\delta = 0 \\ III & \quad \alpha_3\alpha + \beta_3\beta + \gamma_3\gamma + \delta_3\delta = 0 \\ IV & \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 \end{aligned}$$

Vi løser de tre homogene ligningene på standard måte ved å finne minorenene i en determinant.

$$\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \quad (13.2)$$

Vektoren vi får her er i utgangspunktet ikke normert slik at vi må gjøre dette for at den skal representere en sirkel.

En spesiell variant av dette er å finne en linje gjennom to punkter. De tre vektorene som da kommer i betraktning er vektorene til punktene og vektoren til punktet \mathbf{u} i uendelig. \diamond

De tre sirkelvektorene kan være ordinære sirkler, linjer eller punkter. Vi kan imidlertid ikke ha tre linjer, da vil vi ikke få noen løsning.

Appolloniusproblemet kan også løses ved de to metodene over. Ved den første metoden kan vi gi eksplisitte uttrykk for de fire koordinatene. Den andre metoden er imidlertid enklere å bruke i praksis, og vi ser på det generelle problemet ut fra dette.

Oppgave 13.2 Gitt tre sirkelementer \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 og \mathbf{s}_3 . Finn en sirkel som tangerer de tre.

Løsning: Ved tangering har vi at vinkelavstanden er pluss eller minus 1. I tillegg har vi at normen til \mathbf{s} skal være 1. Vi finner da den søkte sirkelen ved å løse ligningsystemet

$$I \quad \vec{\mathbf{s}}_1 \cdot \vec{\mathbf{s}} = 1, II \quad \vec{\mathbf{s}}_2 \cdot \vec{\mathbf{s}} = 1, III \quad \vec{\mathbf{s}}_3 \cdot \vec{\mathbf{s}} = 1, IV \quad \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{s}} = 1 \quad (13.3)$$

Dette gir tre lineære ligninger og en kvadratisk. Skriver vi ut ligningene får vi

$$\begin{aligned} I & \quad \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma + \delta_1\delta = 1 \\ II & \quad \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma + \delta_1\delta = 1 \\ III & \quad \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma + \delta_1\delta = 1 \\ IV & \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 \end{aligned}$$

Her er tre lineære ligninger og en kvadratisk. Utrykk for tre av de variable ved den fjerde finnes ut fra den tre lineare ligningene. Den fjerde finnes så ut fra den kvadratiske ligningen. I alminnelighet blir der to løsninger. \diamond

Sirkelvektorene kan være både ordinære sirkler, linjer eller punkter. Ligningene endrer seg noe når et eller flere av elementene er punkter. Vinkelavstanden mellom en sirkel og et punkt på sirkelen er 0, slik at vi må sette 0 inn i ligningene her. Den søkte sirkel kan også skjære en av de kjente under en bestemt vinkel, og skalarproduktet settes lik v-avstanden. ¹

I praksis er metoden svært anvendelig. Problemet ved å finne en generell løsning på appolloniusproblemet har vært diskutert en del. Ved å overføre fra xyr-koordinater til S-koordinater, finne løsningene i dette systemet, og

¹Vi vil finne en sirkel \mathbf{s} som går gjennom punktet \mathbf{p} , tangerer en sirkel \mathbf{a} , og skjærer en sirkel \mathbf{b} under en vinkel på 60° . Vi løser da ligningsystemet. $I\mathbf{s} \cdot \mathbf{p} = 0$, $II\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} = -1$, $III\mathbf{s} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}$, $IV\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$

føre dem tilbake igjen er det gitt en elementær metode til å løse problemet fullstendig. ²

Likeledes kan vi ved disse koordinatene behandle alle andre geometriske problemer knyttet til sirkler linjer og punkter, både insidensproblemer og metriske problemer.

Et område som standardkoordinatene kaster lys over er heltallsammenhengene vi nevnte innledningsvis.

13.2 Heltallstrukturer

Lagarias, Colin og Wilks fant Descartes kompleks teorem ved at de undersøkte hvordan koordinatene til sentrene til sirklene i **Appolonius kurv** var rasjonale tall. Disse forhold kan imidlertid forstås mer direkte ut fra sirkelkoordinater.

Som nevnt i kapittelet om Møbiusgeometri gjelder de lineære sammenhengene mellom radiene til sirklene også for ikke-euklidske geometrier. Dette betyr imidlertid at lineærsammenhenger vil gjelde vektorene som såden og ikke bare for iradiene, og spesielt gjelder derfor Descartes II. teorem for vektorer.

Setning 95 *Descartes II. teorem for sirkelvektorer*

*Gitt tre sirkler **a**, **b** og **c** med sirkelvektorer som gjensidig tangerer hverandre,*

²Metoden er enkel og rask å bruke for eksempel i et matematikkprogram. I Mathematica definerer vi først sirkelvektorer, anvender disse, og fører så resultatet tilbake til xyr-koordinater.

```
Sv=Function[{x, y, r}, {x/r, y/r, (1-x^2-y^2+r^2)/(2r), i(1+x^2+y^2-r^2)/(2r)}]
Gv=Function[{alpha, beta, gamma, delta}, {alpha/(gamma-i*delta), beta/(gamma-i*delta), 1/(gamma-i*delta)}]
a=Sv[2,3,1]
b=Sv[5,2,2]
c=Sv[3,6,3]
x={x1,x2,x3,x4}
Solve[{a.x==1,b.x==1,c.x==1,x.x==1},x]
En av løsningene blir
s={alpha, beta, gamma, delta} = {299+96*sqrt(33)/289, 3(223+60*sqrt(33))/578, -2(381+74*sqrt(33))/289, 3i(115+124*sqrt(33))/578}
Vi må så bruke den omvendte funksjon for å overføre til xyr-koordinater
Gv[alpha, beta, gamma, delta]
s={x, y, r} = {273-8*sqrt(33)/101, 2(501-28*sqrt(33))/303, -2(321-76*sqrt(33))/303}
```

og sirkler \mathbf{d} og \mathbf{e} som omskriver og er innskrevet i disse. Da gjelder relasjonen

$$\vec{d} + \vec{e} = 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad (13.4)$$

Bevis. Descartes II. teorem vil gjelde for hver av koordinataksene som basiselement i et metrisk system. Dette fører til at lineariteten vil gjelde for hele vektorene. \diamond

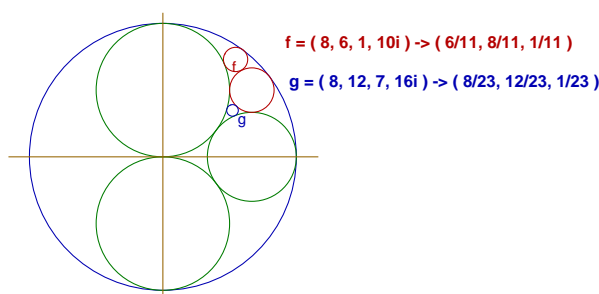
Har vi derfor fire sirkler i en appolloniusstruktur med heltallige koordinater vil vi derfor kunne legge inn nye sirkler mellom disse, og alle de nye sirkelen vil ha heltallige koordinater. Spesielt vil dette gi heltallige iradier siden disse er gitt ved $\gamma - i\delta$. Vi ser på den mest undersøkte situasjonen, nemlig sirkelene i enhetsirkelen.

Utvikling 13.1 Vi velger det konkrete tilfellet der sirkelene $(0, 0, -1)$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ og $(\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{3})$ danner en Appolloniuskurv-basis. Disse er gitt ved sirkelkoordinater som $\mathbf{a} = (0, 0, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1, i)$, $\mathbf{c} = (-1, 0, 1, i)$ og $\mathbf{d} = (0, -2, 1, 2i)$. Vi finner sirkelen \mathbf{e} mellom \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{d} ved

$$\mathbf{e} = 2(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}) - \mathbf{c} = (3, 4, 1, 5i)$$

Denne har spesielt iradius $1 - i \cdot 5i = 6$.

Alle andre sirkler som legges mellom disse sirkelene vil dermed ha heltallige sirkelkoordinater.

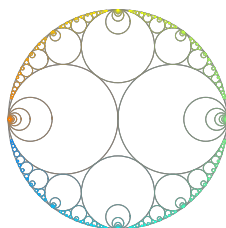


Vi nevner til slutt i denne forbindelse at når vi inverterer en sirkel med heltallige sirkelkoordinater over en annen sirkel med heltallige koordinater vil resultatet være en ny sirkel med heltallige koordinater. Dette ser vi av uttrykket for inverterte sirkler $\mathbf{b} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} - \mathbf{a}$ 13.6 Vi kan derved invertere

en hel appolloniuskurv over en sirkel og få en ny appolloniuskurv.

Fordsirkler kommer også i et bestemt lys betraktet ut fra sirkelkoordinater. Uttrykkes disse i standard sirkelkoordinater viser det seg at det er en direkte forbindelse til pytagoreiske triplerter.

Som vi så innledningsvis er Fordsirkler sirkler som tangerer tallinjen. Vi kunne også sett på sirkler som tangerer enhets sirkelen, men dette gir akkurat samme uttrykk som behandlingen av sirkler som tangerer x-aksen.



Sirkler som tangerer x-aksen har v-avstand ± 1 til denne. Dette betyr at når en sirkel tangerer x-aksen blir første koordinat $\alpha = \pm 1$ for denne sirkelen. Vi betenker at for en normert sirkelvektor har vi $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$, som blir til $\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 0$ når $\alpha^2 = 1$. Nå er δ en imaginær størrelse, slik at vi kan sette

$$\beta^2 + \gamma^2 = \bar{\delta}^2 \quad (13.5)$$

der $\bar{\delta} = i\delta$. Dette uttrykket er det samme som ved pytagoras setning, og heltallsløsninger vil være pytagoreiske triplerter. Angis disse med $\beta = a^2 - b^2$, $\gamma = 2ab$ og $\bar{\delta} = a^2 + b^2$ gir dette sirkelkoordinatene

$$S(s) = P(a, b) = (1, a^2 - b^2, 2ab, i(a^2 + b^2))$$

Ved fremstillingen forutsettes $a > b$.

Her er første koordinat 1 som betyr at sirklene tangerer x-aksen. Videre kan vi legge merke med at iradien til Forsirkelen er gitt ved $\gamma + i\delta = 2ab + a^2 + b^2 = (a + b)^2$, og at tangeringspunktet er gitt ved $\frac{a-b}{a+b}$. Vi skal etterhvert se at denne fremstillingene gir alle Fordsirklene.

Setning 96 *To Fordsirkler s_1 og s_2 vil ikke skjære hverandre, og v-avstanden mellom to sirkler $F_1 = P(a, b)$ og $F_2 = P(c, d)$ er gitt ved $v_{12} = 1 - (ac - bd)^2$.*

Bevis. Sirklenes v-avstand er gitt ved skalarproduktene mellom dem

$$s_1 \cdot s_2 = P(a, b) \cdot P(c, d) = (1, a^2 - b^2, 2ab, i(a^2 + b^2)) \cdot (1, c^2 - d^2, 2cd, i(c^2 + d^2))$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 1 - 2(ad - bc)^2$$

Dette uttrykket er enten er 1, -1 eller mindre enn -1. Når v-avstanden er 1 ligger sirklene inni hverandre, når den er -1 tangerer sirklene hverandre utvendig, og når den er mindre enn -1 ligger sirklene fra hverandre. \diamond

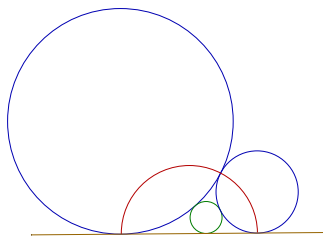
Den mest interessante situasjonen når vi ved $(ad - bc) = 1$. Da blir v-avstanden -1, og vi har ytre tangering. Ortogonalsirkelen til de to og x-aksen er da også gitt heltallig.

Setning 97 Gitt to Fordsirkler gitt ved $F_1 = P(a, b)$ og $F_2 = P(c, d)$ som tangerer hverandre utvendig slik at $|ad - bc| = 1$. Da er ortogonalsirkelen r til disse og x-aksen gitt ved

$$\mathbf{r} = (0, ac - bd, ad + bc, i(ac + bd))$$

Bevis. De to sirklene tangerer x-aksen i henholdsvis $p_1 = \frac{a-b}{a+b}$ og $p_2 = \frac{c-d}{c+d}$. Radien til den ortogonale sirkelen er gitt ved $r = \frac{p_1 - p_2}{2} = \frac{1}{(a+b)(c+d)}$, og sentret ved $x_r = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{ac - bd}{(a+b)(c+d)}$ og 0. Føres dette over til Sirkelkoordinater fremkommer uttrykket over. \diamond

Setning 98 Gitt to Fordsirkler $F_1 = P(a, b)$ og $F_2 = P(c, d)$ som tangerer hverandre utvendig.



Da er sirkelen mellom dem gitt ved $F_3 = P(a+c, b+d)$ som vil si at vi adderer de genererende elementene til to sirkler for å få de genererende elementene til sirkelen imellom.

Bevis. De tre sirklene F_1 , F_2 og F_3 og x-aksen $S(x)$ danner fire sirkler i en Descartesstruktur. Sirkelen \mathbf{r} er ortosirkelen til F_1 , F_2 og x-aksen og komplementær til F_3 . Ut fra Descartes III.10 teorem har vi

$$F_3 = F_1 + F_2 + S(x) + 2\mathbf{r}$$

$\Rightarrow F_3 = (1, a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac - bd), 2ab + 2cd + 2(ad + bc), i(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd)))$
 $\Rightarrow F_3 = (1, ((a + c)^2 - (b + d)^2), 2(a + c)(b + d), i((a + c)^2 + (b + d)^2)) = P(a + c, b + d)$
 og vi har bevist forholdet. \diamond

Dermed blir det å finne en ny Fordsirkel det samme som å finne en ny pytagoreisk tripllett, og alle Fordsirkler er dermed gitt ved pytagoreiske triplletter.

13.3 Sirkelvektorer

Ved etableringen av S-koordinater er veien kort til sirkelvektorer og de forholdene som kan betraktes uten å se på de enkelte koordinatene. Dette er et rikt område, men vi skal begrense oss til å se på noen sentrale forhold. Det vi særlig skal se er hvordan sirkelinversjon får et enkelt uttrykk ved sirkelvektorer. Dette bygger på lineære forbindelser mellom vektorene, og vi ser først på dette.

Setning 99 *En lineærkombinasjon $t\vec{s}_1 + (1 - t)\vec{s}_2$ av to sirkelvektorer \vec{s}_1 og \vec{s}_2 gir en sirkelbunt av sirkler.*

Bevis. Alle sirklene i en sirkelbunt er normale til to sirkelplan p_1 og p_2 . Disse har skalarproduktet 0 med s_1 og s_2 . Dette fører til at de også har skalarprodukt 0 med lineærkombinasjonen

$$p_1 \cdot (t\vec{s}_1 + (1 - t)\vec{s}_2) = tp_1 \cdot \vec{s}_1 + (1 - t)p_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$$

og alle sirklene er med i de to planene og danner dermed en sirkelbunt. \diamond

Vi kan finne inversjons sirkelen mellom to sirkler ved en lineærkombinasjon mellom dem.

Setning 100 *Differansen av to S-vektorer representerer inversjons sirkelen mellom de to.*

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{|\vec{a} - \vec{b}|}$$

Bevis. Inversjons sirkelen må ligge i samme sirkelbunt som de to, og dette kommer av setningen over. At v-avstanden mellom sirklene og inversjons sirkelen er den samme finner vi ved å ta skalarproduktet mellom inversjons sirkelen

og de to andre.

$$c \cdot a = \frac{a - b}{|a - b|} \cdot a = \frac{1 - a \cdot b}{|\vec{a} - \vec{b}|} = -\frac{\vec{a} - \vec{b}}{|a - b|} \cdot b = -c \cdot b$$

og vi har vist forholdet ◇

Setning 101 *Gitt en inversjons sirkel \mathbf{c} og en sirkel \mathbf{a} . Da er den inverterte sirkel \mathbf{b} gitt ved*

$$\vec{b} = \vec{a} - 2(\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{c} \quad (13.6)$$

Bevis. Vi kan finne et uttrykk for normeringsfaktoren $|\vec{a} - \vec{b}|$ i uttrykket over. Denne er gitt ved

$$k = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})} = \sqrt{2 - 2 \cos \theta}$$

der θ er vinkelen mellom \mathbf{a} og \mathbf{b} . Dette kan uttrykkes ved den halve vinkelen.

$$k = \sqrt{2 - 2 \cos \theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

Nå er cosinus til den halve vinkel skalarproduktet mellom inversjons sirkelen \mathbf{c} og sirkelen \mathbf{a} slik at vi kan sette

$$\frac{\vec{a} - \vec{b}}{a \cdot c} = \vec{c}$$

som kan omformes til uttrykket over, og setningen er vist. ◇

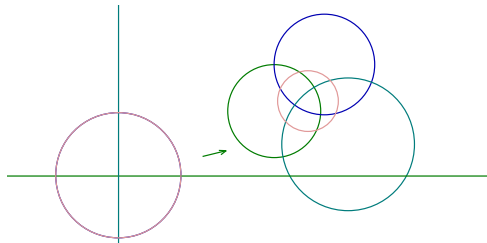
Dermed er vi kommet frem til et enkelt uttrykk for den sentrale operasjonen inversjon av sirkler ved sirkelvektorer.

Vi kan også se på generelle konforme avbildninger av sirkler på grunnlag av sirkelvektorer på en elementær måte.

13.4 Koordinatskifte og lineære avbildninger

Inversjon er en konform avbildning, og alle konforme avbildninger i planet kan gjøres ved ut fra gjentatte inversjoner. Imidlertid kan vi også forstå slike avbildninger ved koordinatskifte for sirkelvektorer. Transformasjonsmatrisen består da ganske enkelt av alle v-avstandene mellom de eksisterende koordinatene og de nye.

Setning 102 Gitt to koordinatsystemer S_a og S_b med basiselementer $a_1 - a_4$ og $b_1 - b_4$.



En sirkel er gitt i de to systemet med

$$\vec{s}_a = S_a(s) = (\alpha_a, \beta_a, \gamma_a, \delta_a)$$

$$\vec{s}_b = S_b(s) = (\alpha_b, \beta_b, \gamma_b, \delta_b)$$

Da er den ene vektoren gitt av den andre ved

$$\vec{s}_b = \vec{s}_c \cdot \mathbf{M}$$

der M er matrisen dannet av alle v -avstandene mellom de to koordinatgruppene der vi setter $v_{a_i, b_j} = v_{ij}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} & v_{1,4} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} & v_{2,4} \\ v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,3} & v_{3,4} \\ v_{4,1} & v_{4,2} & v_{4,3} & v_{4,4} \end{pmatrix}$$

Bevis. Vi betrakter v -avstanden mellom sirkelen s , og en av koordinatene b_1 i det andre S_b . Sirkelen s er gitt ved $s = (\alpha_a, \beta_a, \gamma_a, \delta_a)$ i S_a og b_1 er gitt ved $b_1 = (v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{4,1})$ i samme koordinatsystem. V -avstanden mellom dem er da gitt ved skalarproduktet mellom

$$v = \alpha_a v_{1,1} + \beta_a v_{2,1} + \gamma_a v_{3,1} + \delta_a v_{4,1}$$

og er da den ene koordinaten til s i S_b . Dette er imidlertid akkurat første ledd når vi multipliserer vektoren med matrisen M . Tilsvarende får vi for de andre koordinatene, og forholdet er bevist. \diamond

Radene inneholder vektorene til det ene basen uttrykt ved koordinatene til den andre, og for den andre er det visa versa. Skal vi gå den andre veien

må vi skifte om på dette, det vil si vi må transponere matrisen. Den inverse matrisen er altså den transponerte matrisen, og denne er konkret begrunnet i v-avstandene mellom de to basene.

Vi bemerker til slutt at det i alt finnes ∞^6 konforme transformasjoner i planet, og det henger sammen med at det finnes ∞^6 måter å arrangere et ortogonalt basisystem på.

13.5 Ikke-euklidsk geometri

Den euklidske geometrien er i grunnen et spesialtilfelle innen sirkelgeometrien. Vektorrommet er definert generelt, og den euklidske geometrien oppstår ved at punktet \mathbf{u} i uendelig velges som referanseelement for det metriske systemet. Nå sirkelkoordinatene defineres i forhold til standard koordinater vil de imidlertid være gitt med \mathbf{u} om referansesirkel.

Velges en annen sirkel \mathbf{D} som referansesirkel skjer det ingen ting med selve vektorene for de ordinære sirklene, men deres iradier blir nå skalarprodukt til sirkelen \mathbf{D} . Linjer blir nå den mengde sirkler som har skalarprodukt 0 i forhold til \mathbf{D} $L \subset S(l \in L | l \cdot \mathbf{D} = 0)$.

Punktene må skaleres i forhold til \mathbf{D} . Dette gjøres enkelt ved å dele punktvektoren med skalarproduktet til punktet og \mathbf{D} .

$$\vec{p}_D = \frac{\vec{p}}{\vec{p} \cdot \vec{D}}$$

Den hyperbolske avstanden mellom to punktet i dette systemet er gitt ved skalarproduktet til to skalerte punktene.

$$l_{p,q} = \vec{p}_D \cdot \vec{q}_D = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{p} \cdot \vec{D} \vec{q} \cdot \vec{D}}$$

Dette er det samme uttrykk for avstand som vi fant i tidligere undersøkelser av hyperbolsk geometri. 10.2 Videre finner vi de andre hyperbolske relasjonene fra punkter til linjer og sirkler ved å finne skalarproduktet mellom disse. Vi har dermed midler til å undersøke forhold i hyperbolsk geometri ved sirkelvektorer.

Ut fra slike betraktninger kan vi også forklare det *Komplekse Descartes* på

elementært vis. Dette teoremet er ut fra våre betraktninger grunnet i at vi ikke har \mathbf{u} som metrisk grunnelement, men et helt tilsvarende. I stedet for $\mathbf{u} = (0, 0, 1, -i)$ velger vi nå $\mathbf{k} = (1, i, 0, 0)$ som grunnelement for metrikken. Denne vektoren representerer et komplekst punkt, og kan anvendes på samme måte som \mathbf{u} og \mathbf{e} . Ut fra denne ramme kan vi bevise Det Komplekse Descartes teorem.

Bevis. Det komplekse Descartes teorem. 2.15

Vi velger en vektor $\mathbf{k} = 1, i, 0, 0$ som basiselement for metrikken. Dette er en punktvektor fordi normen er 0. Skalarproduktet mellom en sirkel \mathbf{s} og denne vektoren vil da bli

$$\vec{k} \cdot \vec{s} = (1, i, 0, 0) \cdot (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha + i\beta = \frac{x}{s} + i\frac{y}{s} = \frac{z}{s} = zs$$

Størrelsen zs representerer iradien til sirkelen med \mathbf{k} som basiselement, og vi kan kalle den kompleksradius. Siden \mathbf{k} er punkt slik som \mathbf{u} vil alle relasjoner knyttet til den inverse radien også gjelde for kompleksradier. Dette betyr spesielt at til Det komplekse Descartes teorem gjelder. \diamond

Her er å bemerke at vi ikke får reelle linjer i dette systemet slik at de strukturene der et eller flere elementer blir linjer altså ikke gjelder her. Imidlertid finnes svært mange teoremer der vi kan erstatte iradius for en sirkel \mathbf{r} med kompleksradius. Blant annet gikk vi ikke inn på linjer og punkter i behandlingen av sirkelkretser, slik at teoremer herfra som har med iradier å gjøre også gjelder kompleksradien.

13.6 Fundamental lineærligning

Slik som en lineær sammenheng av to sirkelvektorer gir en sirkelbunt, slik vil en lineær forbindelse mellom tre vektorer gi alle sirklene i et sirkelplan.

Setning 103 *En lineærkombinasjon av tre sirkelvektorer $\mathbf{s} = a\mathbf{s}_1 + b\mathbf{s}_2 + c\mathbf{s}_3$ vil gi sirkler som ligger i samme sirkelplan.*

Bevis. Det finnes en sirkel \mathbf{r} som er ortogonal til de tre sirklene $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3$ som representerer planet. Denne vil også være ortogonal til \mathbf{s}

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} = a\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r} + b\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r} + c\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{r} = 0$$

og setningen er bevist. ◇

Videre gir lineærkombinasjoner av fire vektorer alle sirkelene. Dette henger sammen med at fire sirkler alltid kan danne basiskoordinatene for sirkler i planet. Vi kan derfor sette opp en fundamental homogen ligning for fem sirkler i planet.

$$a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + a_3\mathbf{s}_3 + a_4\mathbf{s}_4 + a_5\mathbf{s}_5 = 0 \quad (13.7)$$

Vi kaller denne fundamentalligningen for systemet, fordi denne bestemmer dimensjonen til vektorrommet. En ligning med 6 ledd vil på samme måte bestemme forholdene i rommet. Denne ligningen setter D. Pedoe[4] som utgangspunkt for sine betraktninger der han beviser Descartes teorem, og den danner en naturlig mellomligning mellom vektorene og determinanten. Mange problemer som vi har sett på ut fra determinanten kan sees enklere ved denne ligning. Dette gjelder spesielt strukturer med en symmetri i seg, og det gjelder mange problemstillinger.

Vi ser først på problemet vedrørende fem sirkler som skjærer hverandre under samme vinkel. Vi fant ved determinanten at denne v-avstanden må være $\frac{1}{4}$ og her viser vi det samme med direkte vektorregning.

Bevis. Mauldon 47 De fem sirklene danner et symmetrisk system, slik at konstanten for de fem sirklene kan settes til en. Vi har da

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_4 + \mathbf{s}_5 = 0$$

Vi finner skalarproduktet mellom denne ligningen og \mathbf{s}_1 . Her vil \mathbf{s}_1 ha skalarproduktet 1 til seg selv, og vil ha v-avstanden v til de andre. gir

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_4 + \mathbf{s}_5) \cdot \mathbf{s}_1 &= 0 \\ \Rightarrow 1 + v + v + v + v &= 0 \\ \Rightarrow v &= \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

som er resultatet fra tidligere. Skalarproduktet med \mathbf{u} gir sammenhengen mellom iradiene.

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_4 + \mathbf{s}_5) \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \Rightarrow s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 &= 0 \end{aligned}$$

◇

Vi ser at denne metoden i dette tilfellet er langt mer rasjonell å bruke enn determinanten. Dette er den imidlertid den eneste situasjonen der det er nok å bruke en ligning. Vi skal se hvordan Descartes II. teorem fremkommer ved anvendelse av to ligninger.

Bevis **Descartes II. teorem 2.12**

I denne sirkeldannelsen kan vi skille mellom to elementer av ulik karakter. På den ene siden er gitt tre sirkler som tangerer hverandre gjensidig, og på den andre siden de to sirklene som er innskrevet i og som omskriver strukturen. Videre ser vi at v-avstandene mellom sirklene fra den ene gruppen og den andre er den samme for alle sirklene. På grunn av denne symmetrien kan vi sette opp fundamentalligningen med bare to ulike konstanter som reduseres ytterligere til en fordi ligningen er homogen. Ligningen blir da seende ut

$$a\mathbf{s}_1 + a\mathbf{s}_2 + a\mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_4 + \mathbf{s}_5 = 0$$

Her er alle v-avstandene -1, bortsett fra v-avstanden v mellom indre og ytre som vi vil finne. Vi finner skalarproduktet med hensyn på \mathbf{s}_1 .

$$(a\mathbf{s}_1 + a\mathbf{s}_2 + a\mathbf{s}_3 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{s}_1 = 0$$

$$\Rightarrow a - a - a - 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = -2$$

Innsatt i ligningen gir dette

$$2(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3) = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$$

Dermed har en ligning mellom vektorer fremkommet av samme form som forholdene mellom iradiene. Spesielt vil nå skalarproduktet med \mathbf{u} gi relasjonen mellom iradiene til disse sirkelene. Danner vi skalarproduktet mellom vektorligningene og den innskrevne sirkelen \mathbf{r}_1 får vi

$$2(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3) \cdot \mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_1$$

$$\Rightarrow 2(-1 - 1 - 1) = 1 + v$$

$$\Rightarrow v = -7$$

V-avstanden mellom indre og ytre sirkel blir -7 som vi har sett tidligere. \diamond

Ved denne metoden kan vi i prinsippet finne alle slags sammenhenger mellom sirkler. Når situasjonen blir mer usymmetrisk må vi imidlertid etablere flere ligninger med flere ukjente skalarer. I den mest generelle situasjonen må det dannes det fem ligninger, fire for å finne konstantene i den homogene vektorligningen, og en for å finne skalarer ut fra vektorligningen. Daniel Pedoe beviser descartes teorem på denne måten.

Bevis: Descartes teorem Vi har fire sirkler $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_4$ i en descarteskonfigurasjon og elementet \mathbf{u} i uendelig gitt ved realasjonen

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + a_3\mathbf{s}_3 + a_4\mathbf{s}_4$$

der $a_1 - a_4$ er konstanter. Vi danner skalarproduktet mellom dette uttrykket og \mathbf{s}_1

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_1 = a_1\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_1 + a_3\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{s}_1 + a_4\mathbf{s}_4 \cdot \mathbf{s}_1$$

Nå danner \mathbf{s}_1 skalarprodukt 1 med seg selv og -1 med de tangerende sirklene. Skalarproduktet med \mathbf{u} gir den inverse radien slik at vi får

$$\Rightarrow s_1 = a_1 - a_2 - a_3 - a_4$$

Tilsvarende gir skalarproduktet med de andre sirklene

$$\Rightarrow s_2 = -a_1 + a_2 - a_3 - a_4$$

$$\Rightarrow s_3 = -a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

$$\Rightarrow s_4 = -a_1 - a_2 - a_3 + a_4$$

Løser vi ligningene med hensyn på konstantene finner vi at disse er halvparten av komplement-tallene til iradiene. 2.2 Dermed kan vi skrive konstantene $a_i = \frac{s_i}{2}$ og vi får vektorligningen

$$2\mathbf{u} = \bar{s}_1\mathbf{s}_1 + \bar{s}_2\mathbf{s}_2 + \bar{s}_3\mathbf{s}_3 + \bar{s}_4\mathbf{s}_4$$

Vi danner til slutt skalarproduktet med elementet i uendelig

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a_1\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u} + a_2\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{u} + a_3\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{u} + a_4\mathbf{s}_4 \cdot \mathbf{u}$$

$$\Rightarrow 0 = a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + a_4s_4$$

Produktligningen fremkommer, og ved å sette inn for konstantene oppnås Descartes setning. \diamond

Når det må dannes så mange ligninger som det vi har gjort her er det naturlig å behandle systemet ved lineær algebra. Et homogent ligningsystem som dette kan løses ved å sette det hele på determinantform.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_4 \cdot \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_4 \cdot \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_4 \cdot \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_4 & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_4 & \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_4 & \mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{s}_4 & \mathbf{s}_4 \cdot \mathbf{s}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_4 \\ s_1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ s_1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ s_1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ s_1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Konstantene til de fire vektorene blir dermed minorene i determinanten. Denne determinanten er prinsipielt den samme som fundamentaldeterminanten, og finner vi skalarproduktet i første rad med hensyn på \mathbf{u} oppstår akkurat determinanten for Descartesdannelsen.

Ved dette fører vektorbetraktningen av sirkler naturlig til determinantformen. Vi kan derfor si at regning med sirkelvektorer, fundamentalligningen og fundamentaldeterminanten danner et naturlig grunnlag for å studere metriske sammenhenger der sirkler i planet og sfærer i høyere dimensjoner inngår som sentrale elementer.

Bibliografi

- [1] C. J. Bradley, *Challenges in Geometry*, Oxford University Press, 2005
- [2] Chris Doran, Antony Lasenby, Joan Lasenby *Conformal geometry, Euclidean space and geometric algebra*, Cambridge University, Mars 2002
- [3] C. Stanley Ogilvy, *Excursions in Geometry*, Oxford University Press, 1969
- [4] Daniel Pedoe, *On a Theorem in Geoemtry*, The Amer. Math. Monthly, Vol. 74, No. 6 (Jun. - Jul., 1967), s. 627-640
- [5] Felix Klein, *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Berlin, Verlag von Julius Springer 1926 (Første utgave 1893)
- [6] George Salmon *A treatise on Conic Sections*, Sixt edition, Chelsea Publishing Company, New York (First edition 1869)
- [7] J. G. Mauldon, *Five Circle Inclined at Same Angle*, Amer. Math. Monthly, Vol 72, Nr 3, s. 324-325
- [8] Jakob Steiner, *Gesammelte Werke*, Verlag von G. Reimer 1881
- [9] Jeffrey C Lagarias, Colin L. Mallows, Allan R. Wilks, *Beyond the Descartes Circle Theorem*, January, 2001 eprint arXiv:math/0101066
- [10] M. D. Fox, *Formulae for the curvatures for Circles in Chains*, Amer. Math. Monthly, Vol. 87. No. 9 (Nov, 1980), s 708-715
- [11] R. Lachlan, *On Systems of Circles and Spheres*, Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 40.(1886),s.242-245

Register

- pentasfærekoordinater , 136
tetrasykelkoordinater , 136
- Appollonius problem, 28, 52
Appollonius radius teorem, 52
Appolloniuskurv, 23
appolloniuspar, 32
appolloniussirkel, 28
arbelos, 15
arbelosteorem, 15
Arkimedes, 15
arkimedes teorem, 15
- basissirkler, 129
begrensede sirkler, 96
- C-typen, 46
Cayley-typen, 46
Cayly-determinant, 46
coaxale sirkler, 88
Cosinussetningen, 73
- Descartes teorem, 18, 41
- ekssirkel, 12
elementet i uendelig, 85
elliptisk krets, 95
- Feray følge, 24
fibonaccikrets, 101
fire innskrevne, 12
firpunktrealisjon, 35
- Fordsirkler, 24
fundamentalligning, 155
- H-elementer, 68
H-typen, 68
Hart-radius teorem, 33
Hart-sirkel teorem, 33
Hart-typen, 67
Hartsirkel, 31
Heltall, 23
Herons formel, 37, 39
horisontalelementer, 68
hyperbolsk avstand, 106
hyperbolsk geometri, 105
hyperbolsk krets, 95
- imaginære sirkler, 140
indreprodukt, 131
insirkel, 12
inversjon, 90
inversjonsirkel, 90
- Kolross, 102
Kompleks Descartes Teorem, 24
kompleksradius, 154
konform, 91
konjugerte kretser, 102
kretsakse, 96
- L-typen, 85
lineære avbildninger, 151

linjedannelse, 55

Möbiusgeometri, 87

negativ radius, 19, 25

nipunktsirkelen, 31

ortogonalsirkel, 13, 52

Pappos porism, 81

parabolsk krets, 95

pentasfærekoordinater, 130

Poincares diskmodell, 105

Ptolemaios setning, 83

punktdannelse, 58

punktet i uendelig, 76

punktvektor, 141

Pytagoras setning, 38

pytagoreiske tripler, 148

reduert determinant, 82

reelle sirkler, 140

S-typen, 77

S-vektorer, 131

sirkel i uendelig, 75

sirkelbundet, 88

sirkelkoordinater, 130

sirkelkrets, 95

sirkelplan, 87

sirkelpotens, 44

sirkeltypen, 77

sirkelvektorer, 131, 140

skalarprodukt, 131

standard koordinater, 132, 141

Stewarts setning, 17, 40

Tetraederstrukturen, 69

tetrasykelkoordinater, 130

Utvidet Descartes teorem, 48

v-avstand, 43

V-elementer, 68

V-typen, 79

vertikalelementer, 68

vinkelavstand, 43

åttesirkelteoremet, 28, 93